3 1761 05234731 7

Digitized by the Internet Archive
in 2026 with funding from
University of Toronto

https://archive.org/details/coursdastronomie01bail

COURS

D'ASTRONOMIE.

ΔΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

COURS

D'ASTRONOMIE

A L'USAGE

DES ÉTUDIANTS DES FACULTÉS DES SCIENCES,

PAR

B. BAILLAUD,

DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE,
DIRECTEUR DE L'OBSERVATOIRE.

PREMIÈRE PARTIE.

QUELQUES THÉORIES APPLICABLES A L'ÉTUDE DES SCIENCES EXPÉRIMENTALES.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1893

(Tous droits réservés.)

YALE UNIVERSITY LIBRARY

PRÉFACE.

Nous nous sommes proposé d'exposer dans le présent Ouvrage, aussi brièvement qu'il nous serait possible de le faire, les notions essentielles de l'Astronomie, notions dont l'étude sérieuse est d'un haut intérêt pour les étudiants des Facultés des Sciences, l'Astronomie utilisant constamment des procédés applicables aux Sciences expérimentales, aussi bien que les méthodes générales des Sciences mathématiques.

Nous avons réuni dans une première Partie diverses questions dont la connaissance intéresse autant les physiciens que les astronomes : les principes du Calcul des probabilités et leur application à la Théorie des erreurs des observations; l'étude des instruments d'optique; celle des instruments de précision qui servent à la mesure du temps, des longueurs ou des angles et, en particulier, des principaux instruments astronomiques; les procédés usités dans les calculs numériques, notamment l'emploi des Tables de logarithmes des nombres et des fonctions trigonométriques, celui des logarithmes d'addition, les formules principales de la Trigonométrie sphérique, les méthodes d'interpolation.

La seconde Partie de cet Ouvrage sera consacrée à l'Astronomie elle-même. Nous y introduirons, avec les questions explicitement comprises dans le programme de la licence ès Sciences mathématiques, diverses questions d'Astronomie théorique qui doivent être, aujourd'hui, regardées comme

élémentaires : la détermination des orbites des planètes et des comètes d'après trois observations, les principes de la théorie des planètes, de la théorie de la Lune et du calcul numérique des perturbations.

Dans un exposé didactique aussi condensé que celui que nous avons essayé de faire, il nous était impossible de nous occuper de l'histoire de la Science et même de renvoyer aux divers auteurs dont la lecture nous a été utile. Nous avons fait exception, dans cette première Partie, pour le *Lehrbuch zur Bahnbestimmung der Cometen und Planeten* de M. Oppolzer qui nous a servi de modèle pour le Chapitre de l'interpolation par différences, et où l'on trouvera des Tables numériques étendues que nous ne pouvions songer à reproduire. Nous avons largement mis à profit la lecture de divers Ouvrages anglais sur les instruments d'optique. Enfin la publication récente du *Calcul des probabilités* de M. J. Bertrand, du *Traité d'Optique* de M. Mascart, du *Traité de Mécanique céleste* de M. F. Tisserand nous a été d'un grand secours.

Nous ne pouvons, en terminant, que solliciter l'indulgence des lecteurs. C'est une entreprise hardie que la rédaction d'un Traité didactique. Nous ne nous y serions pas décidé, même après quinze années d'enseignement, s'il ne nous avait paru utile de réunir en un livre peu volumineux un certain nombre de connaissances importantes que les étudiants ne trouvent qu'éparses dans des Traités spéciaux.

B. BAILLAUD.

COURS

D'ASTRONOMIE.

PREMIÈRE PARTIE.

CHAPITRE I.

PRINCIPES DU CALCUL DES PROBABILITÉS.

1. Définition de la probabilité d'un événement. — Si l'on a pu classer toutes les circonstances relatives à la production d'un événement en cas également possibles, *la probabilité de cet événement est le rapport du nombre des cas dans lesquels il se produit au nombre total des cas possibles.*

Par exemple, si l'on jette un dé à jouer sur lequel rien ne distingue physiquement une face d'une autre, et si, ignorant la position du dé au moment où on le jette et toutes les circonstances de son mouvement, on regarde comme également possible d'amener l'un quelconque des points 1, 2, 3, 4, 5, 6, la probabilité de l'un de ces points est $\frac{1}{6}$.

Il est indispensable que les cas possibles soient susceptibles d'énumération. Ainsi, on ne pourra pas demander la probabilité qu'un nombre moindre que 100 soit aussi moindre que 50. La définition précédente ne s'applique pas à une pareille question. Si l'on pensait que le mot *probabilité* a un sens même dans ce cas, et pour valeur $\frac{1}{2}$, on en conclurait que la probabilité est aussi $\frac{1}{2}$

qu'un nombre moindre que 10000 soit moindre que 2500, tout nombre ayant un carré, les nombres moindres que 100 ayant des carrés inférieurs à 10000, et les nombres moindres que 50 des carrés inférieurs à 2500.

2. **Probabilité composée.** — *Si tous les cas possibles peuvent se partager en groupes, la probabilité de l'événement est la somme des probabilités qu'il a dans chaque groupe.*

Ainsi la probabilité d'amener avec deux dés une somme égale à 8 est la somme $\frac{1}{18} + \frac{1}{18} + \frac{1}{36}$ des probabilités d'amener 2 et 6, 3 et 5, 4 et 4.

3. **Probabilité d'un événement composé.** — On appelle *événement composé* la *réunion de plusieurs événements simples.*

a. Dans le cas où les événements simples sont indépendants les uns des autres, la probabilité de l'événement composé est manifestement le produit des probabilités des événements simples.

Ainsi la probabilité d'amener quine, ou 5 et 5, avec deux dés est le produit $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$ ou $\frac{1}{36}$ des probabilités d'amener 5 avec le premier et 5 avec le second; car, si le premier dé a amené 5, ce qui arrive dans un cas sur six, il y a une chance sur six que le second amène également 5 : il y a donc un cas favorable sur 36.

b. Mais si deux événements simples influent l'un sur l'autre, la probabilité de l'événement composé est le produit de la probabilité du premier événement simple par la probabilité que, le premier s'étant produit, le second se produira.

Par exemple, on a dans une urne deux boules blanches et deux boules noires; on en tire une boule, puis, sans la remettre dans l'urne, on en tire une autre. Quelle est la probabilité d'amener deux boules blanches?

La probabilité d'amener d'abord une boule blanche est $\frac{1}{2}$. Si on

ne l'a pas amenée, il ne reste pas de cas favorable. Si on l'a amenée, il reste dans l'urne une boule blanche et deux noires. La probabilité d'amener, par un second tirage, la boule blanche est $\frac{1}{3}$. La probabilité cherchée est $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{6}$. Si l'on énumère tous les cas possibles, on obtient le Tableau

$$\begin{array}{cccccc} B_1B_2 & B_1N_1 & B_1N_2 & B_2B_1 & B_2N_1 & B_2N_2 \\ N_1B_1 & N_1B_2 & N_1N_2 & N_2B_1 & N_2B_2 & N_2N_1 \end{array}$$

il y en a deux sur 12 qui donnent deux blanches.

4. **Cas où le nombre des événements possibles est infini.** — Parfois, bien que les circonstances ne puissent être classées en cas également possibles, on peut définir la probabilité. On dit que *la probabilité d'un événement est p si l'on peut échanger indistinctement les craintes et les espérances attachées à cet événement contre celles, supposées identiques, de la sortie d'une boule d'une urne dont la composition donnerait à cette sortie la probabilité p.*

L'assimilation est souvent difficile à faire; on peut la trouver défectueuse, arbitraire; le Calcul des probabilités ne peut s'en préoccuper; une fois qu'elle est faite, il en déduit des conséquences qui valent ce que vaut cette assimilation.

5. **Distribution des événements fortuits.** — Le théorème le plus important de la théorie des probabilités est celui-ci : *Pourvu que les événements fortuits soient assez nombreux, le hasard les distribue équitablement entre tous les cas possibles, sans en favoriser aucun.* Dans les paragraphes suivants, nous étudierons comment se distribuent les événements par la réitération des épreuves; nous aurons besoin des formules célèbres de Wallis et de Stirling; nous allons d'abord les démontrer.

6. **Formule de Wallis.** — Posons

$$y_m = \int_0^1 \frac{x^m}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

L'intégration par parties donne

$$\int \frac{x^m}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -x^{m-1}\sqrt{1-x^2} + (m-1)\int \frac{x^{m-2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx - (m-1)\int \frac{x^m}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Si les limites de l'intégration sont o et 1 et que m soit supérieur à $+1$, cette formule devient

$$(1) \qquad y_m = \frac{m-1}{m}\,y_{m-2}.$$

Si m est un entier pair, l'application réitérée de la formule (1) ramènera le calcul de y_m à celui de y_0 dont la valeur est $\frac{\pi}{2}$, et l'on aura

$$(2) \qquad y_m = \frac{(m-1)(m-3)(m-5)\dots 1}{m(m-2)(m-4)\dots 2}\,\frac{\pi}{2}.$$

Si m est un entier impair, on ramènera le calcul de y_m à celui de y_1, dont la valeur est un, et l'on trouvera

$$(3) \qquad y_m = \frac{(m-1)(m-3)(m-5)\dots 2}{m(m-2)(m-4)\dots 3}.$$

y_m diminuant visiblement quand m augmente, puisque tous les éléments de l'intégrale diminuent, les trois rapports

$$\frac{y_m}{y_m}, \quad \frac{y_m}{y_{m+1}}, \quad \frac{y_m}{y_{m+2}}$$

sont rangés par ordre de valeurs croissantes. La première est un. La dernière, si l'on suppose m pair, est $\frac{m+2}{m+1}$, qui tend vers un quand m augmente indéfiniment. Le rapport intermédiaire $\frac{y_m}{y_{m+1}}$ a donc, si m est pair, pour limite l'unité. Donc

$$1 = \lim (m+1)\,\frac{(m-1)^2(m-3)^2\dots 3^2}{m^2(m-2)^2\dots 2^2}\,\frac{\pi}{2};$$

d'où

$$(4) \qquad \frac{\pi}{2} = \lim \frac{2^2.4^2\dots m^2}{1^2.3^2\dots(m-1)^2}\,\frac{1}{m+1}.$$

7. **Convergence d'un produit d'un nombre infini de facteurs.** — Si la série $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ dont tous les termes ont le même signe est convergente, le produit $(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots(1+\alpha_n)$ tend vers une limite différente de zéro quand n augmente indéfiniment.

Soient, en effet, m et p deux valeurs de n. On a

$$\log(1+\alpha_m)(1+\alpha_{m+1})\ldots(1+\alpha_p) = \sum_m^p \log(1+\alpha_i) = \sum_m^p \alpha_i(1+\theta_i),$$

θ_i tendant vers zéro quand i augmente indéfiniment.

Or le second membre se compose de deux parties, dont la première $\sum_m^p \alpha_i$, pourvu que l'on ait pris m assez grand, est, si grand que soit p, moindre que toute quantité donnée d'avance, et d'une seconde partie $\Sigma\theta_i\alpha_i$ toujours très petite par rapport à la première. Ce second membre, pourvu que l'on ait pris m assez grand, est donc inférieur, si grand que soit p, à tout nombre donné d'avance. La série $\Sigma\log(1+\alpha_i)$ est, par suite, convergente, et le produit $\Pi(1+\alpha_i)$ qui est croissant si les α_i sont positifs, décroissant s'ils sont négatifs, tend vers une limite finie différente de zéro.

8. **Formule de Stirling.** — Posons

$$1.2\ldots n = n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \mathrm{F}(n).$$

Nous en déduisons

$$1.2\ldots n(n+1) = (n+1)^{n+\frac{3}{2}} e^{-(n+1)} \mathrm{F}(n+1),$$

d'où

$$\frac{\mathrm{F}(n+1)}{\mathrm{F}(n)} = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Or

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)} = -\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \cdots\right)$$

$$= -\left(1 + \frac{\theta}{12n^2}\right),$$

θ ne croissant pas indéfiniment avec n. Il s'ensuit que

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{e}\,e^{-\frac{\theta}{12n^2}}$$

et que

$$\frac{F(n+1)}{F(n)} = e^{-\frac{\theta}{12n^2}} = 1-\frac{\theta'}{12n^2},$$

θ' ne croissant pas indéfiniment avec n. Donc

$$F(n+p) = F(n)\left(1-\frac{\theta'_0}{12n^2}\right)\left[1-\frac{\theta'_1}{12(n+1)^2}\right]\cdots\left[1-\frac{\theta'_{p-1}}{12(n+p-1)^2}\right].$$

La série formée par les seconds termes des divers facteurs étant convergente, $F(n+p)$ a une limite finie quand n augmente indéfiniment. Soit G cette limite. On aura la formule suivante, due à Moivre,

$$\lim\frac{1.2\ldots n}{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}} = G. \tag{5}$$

C'est la détermination de G qui est due à Stirling. Pour y parvenir, écrivons comme il suit la formule de Wallis

$$\frac{\pi}{2} = \lim\frac{2^{2m}\left(1.2\ldots\frac{m}{2}\right)^4}{(1.2\ldots m)^2}\,\frac{1}{(m+1)},$$

et appliquons la formule (5), nous aurons

$$\frac{\pi}{2} = \lim\frac{2^{2m}\left(\frac{m}{2}\right)^{2m+2}e^{-2m}G^2}{m^{2m+1}e^{-2m}(m+1)} = \lim\frac{G^2 m}{4(m+1)} = \frac{G^2}{4}.$$

D'où

$$G = \sqrt{2\pi}.$$

9. Distribution de deux événements contraires par la réitération des épreuves. — *On suppose que deux événements contraires soient seuls possibles; la probabilité du premier est p, celle du second est q; on fait μ épreuves; quelle est la probabilité que le premier se produise n fois, le second $\mu - n$ fois?*

Si l'on assujettissait les deux événements simples à se produire non seulement un nombre de fois donné, mais dans un ordre déterminé, l'événement en question serait un événement composé dont la probabilité serait le produit $p^n q^{\mu-n}$ des probabilités des événements simples. Mais, si l'on regarde comme identiques les successions d'événements qui ne diffèrent que par l'ordre de ces événements, le même groupe pouvant se rencontrer autant de fois que l'on peut faire de groupes distincts de μ quantités n à n, c'est-à-dire

$$\frac{1.2\ldots\mu}{1.2\ldots n.1.2\ldots\mu-n} \text{ fois},$$

la probabilité est

$$\frac{1.2\ldots\mu}{1.2\ldots n.1.2\ldots\mu-n}\, p^n q^{\mu-n}. \tag{7}$$

C'est le $(\mu-n+1)^{\text{ième}}$ terme du développement de

$$(p+q)^\mu,$$

suivant les puissances descendantes de p.

Comme $p+q=1$, la somme des probabilités de tous les groupes possibles est bien un.

10. Quel est le groupe le plus probable? — C'est celui où le premier événement arrive n fois et le second $\mu-n$ fois, si le $(\mu-n+1)^{\text{ième}}$ terme du développement de $(p+q)^\mu$ est plus grand que le précédent et que le suivant. Ces trois termes sont

$$\frac{1.2\ldots\mu}{1.2\ldots(n+1)1.2\ldots(\mu-n-1)}\, p^{n+1} q^{\mu-n-1},$$

$$\frac{1.2\ldots\mu}{1.2\ldots n.1.2\ldots(\mu-n)}\, p^n q^{\mu-n},$$

$$\frac{1.2\ldots\mu}{1.2\ldots(n-1)1.2\ldots(\mu-n+1)}\, p^{n-1} q^{\mu-n+1}.$$

Les rapports du terme du milieu aux deux autres

$$\frac{n+1}{\mu-n}\frac{q}{p},\quad \frac{\mu-n+1}{n}\frac{p}{q}$$

sont plus grands que un, si

$$p\mu-q<n<p\mu+p.$$

La différence des deux limites de n étant un, il n'y a qu'une valeur possible de n; *le groupe le plus probable est celui pour lequel*

$$n = p\mu, \qquad \mu - n = q\mu,$$

si $p\mu$ *et* $q\mu$ *sont des nombres entiers.* Dans les autres cas, la combinaison la plus probable est celle pour laquelle le rapport des nombres d'arrivées des deux événements simples est aussi voisin que possible du rapport de leurs probabilités.

Nous supposerons dans les paragraphes suivants que n et $\mu - n$ aient respectivement pour valeur $p\mu$ et $q\mu$.

11. **Probabilité de l'événement le plus probable.** — Cette probabilité est

$$\frac{1.2\ldots\mu}{1.2\ldots\mu p.\,1.2\ldots\mu q}\,p^{\mu p}q^{\mu q}.$$

En remplaçant les produits $1.2\ldots\mu$, $1.2\ldots\mu p$, $1.2\ldots\mu q$ par les valeurs approchées que donne la formule de Stirling, elle devient

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}}. \tag{8}$$

On voit qu'elle tend vers zéro avec $\frac{1}{\mu}$, mais seulement comme $\frac{1}{\sqrt{\mu}}$.

12. **Probabilité d'un écart donné.** — On appelle *écart* la différence entre les nombres d'arrivées du premier événement dans un cas quelconque et dans le cas le plus probable. La probabilité d'un écart h est

$$\frac{1.2\ldots\mu}{1.2\ldots(\mu p - h)\,1.2\ldots(\mu q + h)}\,p^{\mu p - h}q^{\mu q + h}.$$

Si l'on remplace encore les produits qui composent le premier facteur par les valeurs approchées que donne la formule de Stirling, cette expression devient

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}}\left(1 - \frac{h}{\mu p}\right)^{-\left(\mu p - h + \frac{1}{2}\right)}\left(1 + \frac{h}{\mu q}\right)^{-\left(\mu q + h + \frac{1}{2}\right)}.$$

On trouve sans peine, en appliquant le développement en série

de $\log(1+z)$,

$$\log\left(1-\frac{h}{\mu p}\right)^{\left(\mu p-h+\frac{1}{2}\right)}\left(1+\frac{h}{\mu q}\right)^{\left(\mu q+h+\frac{1}{2}\right)}=\frac{h^2}{2\mu pq}+\frac{h}{2\mu}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)+\varepsilon,$$

ε désignant des termes de l'ordre de $\frac{1}{\mu^2}$. Il s'ensuit qu'approximativement

$$\left(1-\frac{h}{\mu p}\right)^{-\left(\mu p-h+\frac{1}{2}\right)}\left(1+\frac{h}{\mu q}\right)^{-\left(\mu q+h+\frac{1}{2}\right)}=e^{-\frac{h^2}{2\mu pq}}e^{-\frac{h}{2\mu}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)}.$$

Si $\frac{h}{\mu}$ est petit, le second facteur diffère très peu de l'unité, et la probabilité cherchée est à peu près

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}}e^{-\frac{h^2}{2\mu pq}}. \tag{9}$$

Si, au contraire, h^2 est un peu grand par rapport à μ, ce premier facteur est extrêmement petit, et la probabilité est insensible.

Pour ces motifs, on adopte toujours la formule (9) comme valeur suffisamment approchée de la probabilité d'un écart h.

La comparaison des formules (8) et (9) montre que, si h est de l'ordre de $\sqrt{\mu}$ ou d'un ordre moindre, le rapport de la probabilité de l'écart h à la probabilité maximum est voisin de un. Si, au contraire, h surpasse notablement $\sqrt{\mu}$, ce rapport est très petit. *Donc les événements les plus probables sont groupés autour du plus probable de tous.*

13. **Probabilité d'un écart inférieur à un nombre donné.** — Dans le précédent paragraphe, h procède par valeurs entières. Pour plus de commodité, on convient de dire que la probabilité d'un écart compris entre z et $z+dz$ est

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}}e^{-\frac{z^2}{2\mu pq}}dz.$$

Si l'on admet cette façon de parler, la probabilité de l'écart h est remplacée par la somme des probabilités des écarts compris entre deux nombres y et $y+1$ entre lesquels se trouve le nombre h;

cette somme est

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}}\int_{y}^{y+1} e^{-\frac{z^2}{2\mu pq}}\,dz,$$

On sait que l'intégrale diffère peu de $e^{-\frac{h^2}{2\mu pq}}$. Il n'y aura donc pas d'inconvénient à introduire ainsi la variable continue z.

En outre, bien que h ne puisse dépasser μ, on fera varier z de $-\infty$ à $+\infty$. L'extrême petitesse de l'exponentielle, quand z devient supérieur à μ, rend aussi cette convention sans inconvénient dans la pratique.

La probabilité d'un écart compris entre $-\alpha$ et $+\alpha$ est alors

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}}\int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{-\frac{z^2}{2\mu pq}}\,dz.$$

Posant

$$\frac{z}{\sqrt{2\mu pq}} = t,$$

elle devient

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\frac{\alpha}{\sqrt{2\mu pq}}} e^{-t^2}\,dt. \tag{10}$$

Kramp a construit le premier une Table qui donne les valeurs de cette intégrale (10) pour des valeurs de $\frac{\alpha}{\sqrt{2\mu pq}}$ en progression arithmétique, par intervalles aussi resserrés que cela est utile dans les applications.

Si α est infini, l'expression (10) est égale à un, comme on le verra au Chapitre suivant, § 24. On pouvait s'attendre à trouver un résultat voisin de un, puisque la formule (10) n'est qu'approchée, et que la probabilité que l'écart soit compris entre $-\infty$ et $+\infty$ est rigoureusement l'unité. La vérification se fait plus complètement que l'on n'était en droit d'y compter.

D'après la formule (8), l'écart zéro, c'est-à-dire l'événement le plus probable, est infiniment peu probable. D'après la formule (10), la probabilité que l'écart ne dépasse pas un nombre donné α tend vers zéro avec $\frac{1}{\mu}$. Donc, quand μ augmente indéfiniment, l'écart absolu augmente probablement sans limite; mais l'écart relatif, ou le rapport de l'écart au nombre des épreuves, tend vers zéro.

14. Écart probable. Écart moyen. — Le nombre d'arrivées le plus probable de l'événement simple dont la probabilité est p est μp. La probabilité pour que le nombre d'arrivées soit compris entre $\mu p - \alpha$ et $\mu p + \alpha$ est donnée par la formule (10). Si l'on pose

$$\frac{\alpha}{\sqrt{2\mu pq}} = \rho,$$

on a l'énoncé suivant :

La probabilité pour que le nombre d'arrivées de l'événement dont la probabilité est p soit compris entre $\mu p - \rho\sqrt{2\mu pq}$ et $\mu p + \rho\sqrt{2\mu pq}$ est

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\rho} e^{-t^2}\, dt. \tag{11}$$

Si l'on donne cette probabilité, ρ en résulte, et est indépendant de μ.

Dans le cas où cette probabilité est $\frac{1}{2}$, *on dit que* α *est l'écart probable.* Il y a autant de chances pour que l'écart soit plus grand que ce nombre que pour qu'il soit plus petit. On trouve

$$\rho = 0,4769363.$$

L'écart probable est donc

$$0,4769363\sqrt{2\mu pq}.$$

On appelle écart moyen *la valeur probable de l'écart; c'est la somme du produit de chaque écart par sa probabilité, ou*

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi\mu pq}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2\mu pq}} z\, dz.$$

L'intégration est immédiate, $2z\,dz$ étant la différentielle de z^2.

L'écart moyen est, d'après cela, égal à

$$\frac{\sqrt{2\mu pq}}{\sqrt{\pi}},$$

ou à

$$0,5641896\sqrt{2\mu pq}.$$

Le rapport de l'écart probable à l'écart moyen est 0,8453475.

15. **Combien à parier contre un que l'écart soit compris entre des limites données?** — Si l'on veut que la probabilité (11) soit $\frac{P}{P+1}$, ou qu'il y ait P à parier contre un que l'écart soit compris entre les limites $\mu p \pm \rho\sqrt{2\mu pq}$, il faudra que

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\rho} e^{-t^2}\,dt = \frac{P}{P+1}. \tag{12}$$

Les valeurs de ρ croissent beaucoup plus lentement que celles de P.

Le Tableau suivant donne une idée de cette variation :

P.	ρ.	P.	ρ.
1.....	0,477	9999....	2,750
9.....	1,163	99999....	3,123
99.....	1,822	999999....	3,460
999.....	2,326	9999999....	3,770

16. **Extension du théorème de Bernoulli.** — Les résultats des § 10, 11, 12, dus à Bernoulli, s'étendent au cas où les événements possibles sont, à chaque épreuve, en nombre quelconque, et ont des probabilités quelconques p, q, r. *L'événement composé le plus probable est formé de* $p\mu$ *fois le premier événement,* $q\mu$ *fois le second, etc., et les événements composés sont d'autant plus probables qu'ils sont plus voisins de cette distribution.* Nous ne nous arrêterons pas à la démonstration mathématique de ce théorème général, qui justifie l'énoncé donné au § 5.

17. **Application du théorème de Bernoulli aux phénomènes naturels.** — Un grand nombre de phénomènes naturels sont dus à l'action d'une cause constante qui donnerait à chacun d'eux une valeur déterminée, et d'un grand nombre d'actions accessoires qui modifient quelque peu cette valeur.

Si l'on suppose que chacune de ces dernières actions produit une modification très petite, de grandeur déterminée, susceptible seulement de changer de signe, la valeur la plus probable sera celle qui est due purement et simplement à l'action de la cause constante; l'écart entre un événement observé et l'événement le plus probable sera mesuré par l'excès E du nombre des modifica-

tions positives sur le nombre des modifications négatives; la probabilité d'un écart donné sera représentée par le théorème de Bernoulli.

Nous nous contenterons de ce simple aperçu et nous bornerons à ajouter qu'en fait, dans les phénomènes naturels indiqués dans le premier paragraphe de cet article, l'application de la loi de Bernoulli se fait avec une exactitude remarquable. La valeur due à l'action principale est la moyenne de toutes les autres; elle coïncide à peu près, d'après le théorème de Bernoulli avec la moyenne des valeurs observées. En désignant par λ le petit écart dû à l'action d'une cause accessoire, la probabilité qu'un écart soit compris entre deux limites données a et b devient le nombre probable des événements pour lesquels E est compris entre $\frac{a}{\lambda}$ et $\frac{b}{\lambda}$ et est représentée par

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}}\int_{\frac{a}{\lambda}}^{\frac{b}{\lambda}} e^{-\frac{z^2}{2\mu pq}}\,dz,$$

où $p = q = \frac{1}{2}$. Si l'on pose $z = \frac{t}{\lambda}$ et $\frac{1}{\lambda\sqrt{2\mu pq}} = k$, la probabilité cherchée devient

$$\frac{k}{\sqrt{\pi}}\int_a^b e^{-k^2t^2}\,dt. \tag{13}$$

18. **Exemple tiré de la taille d'un grand nombre d'hommes.** — Nous empruntons à la *Physique sociale* de Quételet la comparaison de cette formule aux résultats fournis par la mesure de la taille de 25878 volontaires aux États-Unis. Représentant par $a + b\delta$ une taille mesurée, a étant $1^m,397$, et b, $0^m,0253$, la seconde colonne du Tableau (A) indique le nombre des volontaires ayant la taille marquée par la valeur de δ inscrite dans la première.

Tableau A.

1	4	$-13,2012$	174,27168	697
2	1	$-12,2012$	148,86928	149
3	3	$-11,2012$	125,46688	376
4	7	$-10,2012$	104,06448	728
5	6	$-9,2012$	84,66208	508
6	10	$-8,2012$	67,25968	673
7	15	$-7,2012$	51,85728	778
8	50	$-6,2012$	38,45488	1923
9	526	$-5,2012$	27,05248	14230
10	1237	$-4,2012$	17,65008	21833
11	1947	$-3,2012$	10,24768	19952
12	3019	$-2,2012$	4,84528	14628
13	3475	$-1,2012$	1,44288	5015
14	4054	$-0,2012$	0,04048	164
15	3631	$+0,7988$	0,63808	2317
16	3133	$+1,7988$	3,23568	10137
17	2075	$+2,7988$	7,83328	16254
18	1485	$+3,7988$	14,43088	21430
19	680	$+4,7988$	23,02848	15659
20	343	$+5,7988$	33,62608	11534
21	118	$+6,7988$	46,22368	5454
22	42	$+7,7988$	60,82128	2554
23	9	$+8,7988$	77,41888	697
24	6	$+9,7988$	96,01648	576
25	2	$+10,7988$	116,61408	233

La somme de toutes les tailles est

$$25878a + 367499b,$$

et la moyenne

$$a + 14,2012b.$$

On a retranché de cette moyenne les tailles indiquées par les nombres de la première colonne, et inscrit les résultats dans la troisième, abstraction faite du facteur b. La quatrième contient les carrés des nombres de la troisième, et la cinquième, les produits à une demi-unité près de ces carrés par les nombres de la deuxième.

Nous verrons, dans le Chapitre suivant, que si l'on pose $kb = k'$, k'^2 s'obtient approximativement en divisant la somme des nombres de la cinquième colonne par 27877, le nombre des mesures diminué

d'une unité. On trouve ainsi

$$k' = 0,2771.$$

La probabilité que l'écart d'une taille soit compris entre o et α est

$$\frac{k}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\alpha} e^{-k^2 t^2}\, dt.$$

Posons

$$kt = \theta, \qquad \alpha = \alpha' b;$$

cette intégrale deviendra

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{k'\alpha'} e^{-\theta^2}\, d\theta. \tag{14}$$

Pour déduire de cette formule le nombre des volontaires ayant chacune des tailles indiquées dans la première colonne du Tableau A, nous convenons de regarder comme ayant la taille $a + pb$ ceux dont la taille est comprise entre $a + \left(p - \frac{1}{2}\right) b$ et $a + \left(p + \frac{1}{2}\right) b$. Le nombre de ceux dont la taille est $a + 14b$ est la somme des nombres de ceux plus petits que la moyenne pour lesquels α' est 0,7012 et de ceux plus grands pour lesquels $\alpha' = 0,2988$.

Dans le Tableau B, nous inscrivons : en première colonne, les valeurs de α'; en deuxième colonne, les produits de ces valeurs par k'; la troisième colonne donne les valeurs correspondantes de l'intégrale (14); la quatrième les résultats obtenus en retranchant, dans la partie supérieure chaque nombre du précédent, dans la partie inférieure chaque nombre du suivant. La cinquième donne les produits des nombres de la quatrième par 25878; ces produits donnent le nombre calculé des volontaires de chaque taille, $a + pb$; les valeurs de p sont reproduites dans la sixième. La comparaison des nombres de la cinquième colonne avec ceux de la deuxième du Tableau A montre la concordance entre les résultats de la statistique et ceux de l'application de la formule (14).

Tableau B.

13,7012	3,796	0,4999999	0,0000003	0	1
12,7012	3,519	4999996	0000019	0	2
11,7012	3,242	4999977	0000114	0	3
10,7012	2,965	4999863	0000582	1	4
9,7012	2,688	4999281	0002533	6	5
8,7012	2,411	4996748	0009535	24	6
7,7012	2,133	4987213	0030573	79	7
6,7012	1,856	4956640	0084377	218	8
5,7012	1,579	4872263	0200168	518	9
4,7012	1,302	4672095	0408039	1056	10
3,7012	1,025	4264056	0714755	1850	11
2,7012	0,748	3549301	1076072	2785	12
1,7012	0,471	2473229	1392304	3603	13
0,7012	0,194	1080925	1080925	4006	14
0,2988	0,083	0467194	0467194		
1,2988	0,360	1946648	1479454	3829	15
2,2988	0,637	3161620	1214972	3144	16
3,2988	0,914	4019184	0857564	2219	17
4,2988	1,191	4539395	0520211	1346	18
5,2988	1,468	4817142	0277747	719	19
6,2988	1,745	4932016	0114874	297	20
7,2988	2,023	4978878	0046862	121	21
8,2988	2,300	4994284	0015406	40	22
9,2988	2,577	4998661	0004377	11	23
10,2988	2,854	4999728	0001067	3	24
11,2988	3,131	0,4999953	0,0000225	1	25

19. **Probabilité des causes.** — On appelle *causes,* dans le Calcul des probabilités, *des accidents qui ont accompagné un événement observé.* Ce mot n'a ici aucun rapport avec la notion philosophique de causalité.

20. **Problème général relatif aux causes.** — *Diverses causes* C_1, C_2, ..., C_m *ont pu accompagner un événement. Leurs probabilités* a priori *sont* ϖ_1, ϖ_2, ..., ϖ_m. *La probabilité que la cause* C_i, *si elle se produit, donne à l'événement est* p_i. *On a constaté la production de l'événement. Quelle est la probabilité* z_i *que cet événement est accompagné de la cause* C_i?

Le fait que la cause C_i se serait produite et qu'elle aurait été accompagnée de l'événement est un événement composé dont la

probabilité est (§ 3)

$$p_i \varpi_i.$$

On peut évaluer cette probabilité d'une autre manière : la probabilité de la production de l'événement accompagné de l'une quelconque des causes est

$$p_1 \varpi_1 + p_2 \varpi_2 + \ldots + p_m \varpi_m ;$$

si l'événement se produit, la probabilité qu'il soit lié à la cause C_i est z_i; la production de l'événement accompagné de la cause C_i est donc un événement composé dont la probabilité est

$$(p_1 \varpi_1 + p_2 \varpi_2 + \ldots + p_m \varpi_m) z_i.$$

En égalant les deux expressions de cette probabilité, on trouve

$$z_i = \frac{p_i \varpi_i}{p_1 \varpi_1 + p_2 \varpi_2 + \ldots + p_m \varpi_m}. \tag{15}$$

La plupart des applications qui ont été faites de ce théorème général sont restées illusoires, à cause de l'ignorance absolue où l'on est ordinairement des probabilités p_i, ϖ_i. Nous n'y insisterons pas, renvoyant le lecteur désireux d'approfondir les questions traitées dans ce Chapitre, et aussi dans le suivant, au *Calcul des probabilités,* publié en 1889 par M. J. Bertrand.

CHAPITRE II.

LOI DE PROBABILITÉ DES ERREURS. — COMBINAISON DES OBSERVATIONS.

21. Caractères des erreurs envisagées dans le présent Chapitre. — Les erreurs possibles dans les déterminations de toutes sortes peuvent avoir différents caractères.

Si l'on estime le nombre des boules contenues dans une urne, on commettra probablement une erreur, mais elle ne sera que d'un nombre entier de boules. Nous ne nous occuperons pas dans ces leçons des erreurs de cette sorte.

Si l'on estime le poids d'une masse d'eau contenue dans un vase, on commettra une erreur qui pourra avoir toutes les valeurs possibles, au moins entre certaines limites. C'est aux erreurs de cette espèce que ces leçons s'appliquent tout particulièrement.

Si l'on estime la quantité de sable fin contenu dans un vase, on ne pourra au fond se tromper que d'un nombre entier de grains; mais, dans la pratique, il sera indifférent de se tromper d'un nombre entier ou d'un nombre fractionnaire. Nous assimilerons ce troisième cas au second.

Souvent la mesure d'une grandeur exige plusieurs opérations comportant des erreurs diverses. Ainsi, dans la lecture d'un cercle pourvu d'un microscope micrométrique, on lit d'abord directement la division du cercle, puis on estime avec le microscope la fraction de division. On peut assurément se tromper dans la première opération; mais cette erreur serait de la première sorte, et nous ne nous en occuperons pas. Au reste, le plus souvent, une telle erreur peut être corrigée après coup, le résultat de la mesure étant approximativement connu, et la mesure ne servant qu'à l'obtenir avec plus de précision.

Les erreurs dont nous nous occuperons auront un double caractère; *leurs valeurs possibles formeront une suite continue, et elles n'admettront pas de correction.*

22. Loi de probabilité des erreurs. — Nous allons rechercher, d'après Gauss, la loi de probabilité d'une erreur donnée.

Gauss admet :

1° Que si plusieurs mesures d'une grandeur inspirent la même confiance, la valeur la plus probable de cette grandeur est leur moyenne arithmétique;

2° Que la probabilité d'une erreur Δ est une fonction $\varphi(\Delta)$ de cette erreur, de sorte que la probabilité qu'une erreur soit comprise entre Δ et $\Delta + d\Delta$ est $\varphi(\Delta)\,d\Delta$;

3° Que la probabilité d'une erreur très grande est très petite;

4° Que la meilleure valeur à adopter pour la grandeur mesurée est précisément la valeur la plus probable.

Ces hypothèses faites, soient $x_1, x_2, \ldots, x_m$ m mesures d'une grandeur; la valeur la plus probable X de cette grandeur est

$$X = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_m}{m}.$$

Soit z la valeur exacte. Les erreurs sont

$$z - x_1, \quad z - x_2, \quad \ldots, \quad z - x_m.$$

La probabilité *a priori* de cet ensemble d'erreurs étant

$$\varphi(z - x_1)\,\varphi(z - x_2) \ldots \varphi(z - x_m), \tag{1}$$

c'est la probabilité que z soit la valeur exacte. On choisira z de façon que cette probabilité soit maximum, ce qui a lieu si

$$\frac{\varphi'(z - x_1)}{\varphi(z - x_1)} + \frac{\varphi'(z - x_2)}{\varphi(z - x_2)} + \ldots + \frac{\varphi'(z - x_m)}{\varphi(z - x_m)} = 0. \tag{2}$$

Or cette équation doit être satisfaite si

$$z = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_m}{m}. \tag{3}$$

Si nous posons

$$\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)} = \mathrm{F}(u),$$

les équations (2) et (3) exprimeront que la somme des valeurs de $\mathrm{F}(u)$ s'annule avec la somme des valeurs de u.

Considérons seulement deux valeurs u_1 et $u_2 = -u_1$, nous aurons

$$F(u_2) = -F(u_1),$$

la fonction $F(u)$ est donc impaire. et $F(o)$ est nulle.

Considérons trois valeurs u_1, u_2, $-(u_1 + u_2)$, nous aurons

$$F(u_1) + F(u_2) = F(u_1 + u_2);$$

d'où l'on déduit

$$F'(u_1) = F'(u_1 + u_2) = F'(u_2).$$

La dérivée $F'(u)$ est donc constante; si nous la désignons par C, de

$$F'(u) = C,$$

nous déduisons, en observant que $F(u)$ est impaire,

$$\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)} = F(u) = Cu;$$

d'où

$$\log \varphi(u) = \frac{C}{2} u^2 + C'.$$

Comme nous avons supposé $\varphi(u)$ nulle pour u infini, la constante $\frac{C}{2}$ est négative; représentons-la par $-h^2$, nous aurons

$$\varphi(u) = G e^{-h^2 u^2}.$$

On détermine G en exprimant que la probabilité que l'erreur soit comprise entre $-\infty$ et $+\infty$ est un, ce qui donne

$$G \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 u^2} du = 1$$

ou, en posant $hu = t$,

$$\frac{G}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 1.$$

Nous verrons au § 21 que l'intégrale qui figure dans cette équation est égale à $\sqrt{\pi}$. Donc

$$G = \frac{h}{\sqrt{\pi}}.$$

On a donc cette valeur de φ

4) $$\varphi(\Delta) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \Delta^2}$$

Telle est la loi de probabilité donnée par Gauss. Malgré l'inexactitude manifeste des hypothèses faites, cette loi, qui est confirmée par l'expérience, doit être adoptée. Nous reproduirons plus loin (§ 29) une vérification célèbre qui en a été faite par Bessel.

23. **Démonstration de Laplace.** — Les considérations indiquées au second alinéa du § 17 conduisent à la même formule. Laplace a supposé plus généralement qu'une erreur fût produite par un grand nombre de causes dont chacune pût donner indistinctement les erreurs

$$-n, \quad -(n-1), \quad \ldots, \quad -1, \quad 0, \quad 1, \quad \ldots, \quad n-1, \quad n,$$

et a recherché le nombre des combinaisons qui produirait une erreur l; il a ensuite étendu sa démonstration au cas où les erreurs dues aux diverses causes n'auraient pas la même probabilité. Il a obtenu ainsi la même loi que Gauss.

24. **Démonstration de la formule**

$$s = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}.$$

Si l'on désigne par x et y les coordonnées d'un point d'un plan par rapport à deux axes rectangulaires, on aura manifestement

$$s^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy.$$

Or $x^2 + y^2$ est le carré r^2 de la distance du point à l'origine, et $dx\, dy$ est un élément infiniment petit $d\sigma$ de surface en ce point, de sorte que

$$s^2 = \int e^{-r^2}\, d\sigma,$$

l'intégration étant étendue à tout le plan.

Si l'on détermine l'élément $d\sigma$ au moyen des coordonnées polaires r et θ, on aura

$$s^2 = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r\, dr\, d\theta = 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} e^{-r^2}\, d(r^2).$$

L'intégration est immédiate, et l'on trouve

$$s^2 = \pi.$$

25. **Mesure de la précision des observations.** — Le paramètre h s'appelle *mesure de la précision des observations*. Il varie d'une série d'observations à une autre, et caractérise chaque série. Le rapport de la probabilité d'une erreur nulle à celle d'une erreur Δ est $e^{h^2\Delta^2}$, de sorte que, si l'on obtient ce rapport sous la forme $e^{Q\Delta^2}$, on aura

$$h = \sqrt{Q}.$$

La probabilité qu'une erreur soit comprise entre $-\Delta$ et $+\Delta$ est

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\Delta}^{+\Delta} e^{-h^2 z^2}\, dz;$$

elle est égale à

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-h\Delta}^{+h\Delta} e^{-t^2}\, dt.$$

Dans une autre série d'observations pour laquelle la mesure de la précision serait h', la probabilité qu'une erreur soit comprise entre $-\Delta'$ et $+\Delta'$ serait

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-h'\Delta'}^{+h'\Delta'} e^{-t^2}\, dt.$$

Les deux probabilités sont égales dans le seul cas où

$$h\Delta = h'\Delta'.$$

Ainsi h et h' sont en raison inverse des erreurs également probables. Si $h = mh'$, il y aura, dans le second système, la même probabilité pour qu'une erreur ne dépasse pas mx que pour qu'une erreur du premier système ne dépasse pas x; on peut dire, à ce point de vue, que le premier système est m fois plus précis que le second. De là le nom donné à la constante h.

26. **Erreur probable.** — On appelle *erreur probable une erreur telle qu'il y ait la même probabilité qu'une erreur soit plus grande ou qu'elle soit plus petite*. Si r désigne l'erreur probable, on a

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-r}^{+r} e^{-h^2 z^2}\, dz = \frac{1}{2}.$$

ou

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-hr}^{+hr} e^{-t^2}\, dt = \frac{1}{2}.$$

De cette équation on tire, au moyen de la Table de Kramp,

$$hr = 0,4769363.$$

27. **Erreur moyenne.** — On a parfois appelé *erreur moyenne* la somme des produits des erreurs prises positivement par leurs probabilités respectives. Il importe d'en être prévenu pour éviter toute confusion. D'après Gauss, nous appellerons *erreur moyenne la racine carrée de la somme des produits des carrés des erreurs par leurs probabilités*. Si l'on désigne par m cette erreur moyenne, on a

$$m^2 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 e^{-h^2 z^2}\, dz.$$

L'intégration par parties donne

$$m^2 = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \left[-\frac{z}{2} e^{-h^2 z^2} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{2h\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 z^2}\, dz.$$

Le premier terme est nul ; le second, d'après le § 24, donne

$$m^2 = \frac{1}{2h^2}.$$

On voit que *deux des quantités m, h, r peuvent s'exprimer au moyen de la troisième*. Les formules utiles à cet égard sont

$$(5) \qquad \begin{cases} hr = 0,4769363, & hm = 0,7071068, \\ r = 0,6744897\, m, & m = 1,4826022\, r. \end{cases}$$

28. **Principe de la méthode des moindres carrés.** — La loi de probabilité des erreurs étant admise, on en conclut immédiatement la marche à suivre pour déduire les valeurs les plus probables d'inconnues $x, y, z, \ldots$ des valeurs mesurées $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots$ de quantités $M, M_1, M_2, \ldots$ liées à $x, y, z, \ldots$ par des équations

$$(6) \qquad \begin{cases} M = f(x, y, z \ldots), \\ M_1 = f_1(x, y, z \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

dont le nombre est notablement plus grand que celui des inconnues.

Si $\Delta, \Delta_1, \Delta_2$ sont les différences entre les valeurs que prennent

les seconds membres des équations (6) pour des valeurs adoptées de $x, y, z, \ldots$ et les valeurs mesurées $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots$, les probabilités des erreurs $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \ldots$, étant respectivement $\varphi(\Delta), \varphi(\Delta_1), \varphi(\Delta_2), \ldots$, la probabilité que les valeurs adoptées soient exactes est le produit de ces probabilités, ou

$$\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2[\Delta^2+\Delta_1^2+\ldots]}. \tag{7}$$

Ces valeurs de $x, y, z, \ldots$ seront les plus probables si l'expression (7) est maximum, ou si elles rendent minimum

$$\Delta^2 + \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \ldots. \tag{8}$$

Si les observations sont inégalement précises et que leurs mesures de précision soient $h, h_1, h_2, \ldots$, la probabilité de l'exactitude des valeurs $x, y, z, \ldots$, sera

$$\frac{hh_1h_2\ldots}{\sqrt{\pi}^n} e^{-(h^2\Delta^2+h_1^2\Delta_1^2\ldots)},$$

et les valeurs $x, y, z, \ldots$ seront les plus probables si elles rendent minimum la somme

$$(h\Delta)^2 + (h_1\Delta_1)^2 + \ldots. \tag{9}$$

29. **Nombre des erreurs comprises entre des limites données.** — La probabilité qu'une erreur est comprise entre $-a$ et $+a$ est

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-a}^{+a} e^{-h^2z^2}\, dz.$$

C'est le rapport du nombre des erreurs comprises entre $-a$ et $+a$ au nombre total des observations.

Si l'on pose

$$hz = t,$$

ce rapport devient

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-ah}^{+ah} e^{-t^2}\, dt. \tag{10}$$

Nous avons déjà dit que Kramp a construit une Table des valeurs de cette fonction pour des valeurs de ah procédant par intervalles suffisamment resserrés.

Comme exemple de la concordance entre les résultats de la formule précédente et des erreurs observées, nous rapporterons le résultat de la discussion faite par Bessel de quatre cent soixante-dix comparaisons des positions du Soleil à celles de Sirius et Altaïr par Bradley. Par un procédé qui sera expliqué dans le paragraphe suivant, Bessel a trouvé

$$m = 0'',3909, \qquad r = 0'',2637, \qquad h = 1,809.$$

Si l'on donne à a toutes les valeurs de $0'',1$ en $0'',1$ depuis $0''$ jusqu'à $1''$ et la valeur ∞, les valeurs correspondantes de ah sont

$0'',181$	$0'',362$	$0'',543$	$0'',724$	$0'',905$	
$1'',085$	$1'',266$	$1'',447$	$1'',628$	$1'',809$	∞

Les valeurs de l'intégrale (10), d'après la Table de Kramp, sont

0,202	0,391	0,557	0,694	0,799	
0,875	0,927	0,959	0,979	0,989	1,000

En retranchant chacun de ces nombres du suivant, on a les quotients par 470 des nombres des erreurs comprises entre 0 et $0'',1$, $0'',1$ et $0'',2$, ..., $1''$ et ∞. Ces quotients sont

0,202	0,189	0,166	0,137	0,105	
0,076	0,052	0,032	0,020	0,011	0,010

Par suite, les nombres des erreurs comprises entre ces limites sont

95	89	78	64	49	
36	24	16	9	5	5

Les nombres constatés par la comparaison du résultat le plus probable aux observations elles-mêmes étaient

94	88	78	58	51	
36	26	14	10	7	8

30. **Détermination de la valeur la plus probable d'une quantité mesurée directement.** — Supposons qu'une seule inconnue x ait été déterminée par n observations directes. Soient x_0 une valeur attribuée à cette inconnue, Δ, Δ', Δ'', ..., les différences entre x_0 et les résultats μ, μ', μ'', ..., des mesures. La probabilité que x_0

soit la vraie valeur de x est

$$P = \frac{h^n}{\sqrt{\pi^n}} e^{-h^2(\Delta^2+\Delta'^2\ldots)}. \tag{11}$$

La valeur x_0 la plus probable rend minimum

$$\Delta^2+\Delta'^2+\Delta''^2+\ldots,$$

ou

$$(\mu-x_0)^2+(\mu'-x_0)^2+(\mu''-x_0)^2+\ldots.$$

C'est donc

$$x_0=\frac{\mu+\mu'+\mu''+\ldots}{n}, \tag{12}$$

ou la moyenne arithmétique des mesures, et la formule (11) en donne la probabilité.

Il ne faut pas perdre de vue, au reste, que la formule (12) est une des hypothèses faites pour trouver la loi de probabilité des erreurs.

Soit $x_0+\delta$ une autre valeur de x. La probabilité que ce soit la valeur exacte est

$$P = \frac{h^n}{\sqrt{\pi^n}} e^{-h^2[(\Delta-\delta)^2+(\Delta'-\delta)^2\ldots]}.$$

ou, en désignant généralement par le symbole $[q]$ la somme $q+q'+q''+\ldots$,

$$P' = \frac{h^n}{\sqrt{\pi^n}} e^{-h^2\{[\Delta^2]-2\delta[\Delta]+n\delta^2\}}.$$

Or

$$[\Delta]=0.$$

Donc

$$\frac{p}{p'} = e^{nh^2\delta^2}. \tag{13}$$

Donc, en ce qui concerne la moyenne arithmétique des mesures, la probabilité d'une erreur nulle est à celle d'une erreur δ comme 1 est à $e^{nh^2\delta^2}$. *Donc la mesure h_0 de la précision de la moyenne, son erreur probable r_0, son erreur moyenne m_0* sont données par les formules

$$h_0=h\sqrt{n}, \qquad r_0=\frac{r}{\sqrt{n}}, \qquad m_0=\frac{m}{\sqrt{n}}. \tag{14}$$

31. **Détermination de l'erreur moyenne d'une observation.** — Soient μ, μ', μ'', ... les valeurs observées, ξ la valeur exacte, ε, ε', ε'', ... les erreurs

$$\varepsilon = \mu - \xi, \qquad \varepsilon' = \mu' - \xi, \qquad \varepsilon'' = \mu'' - \xi, \qquad \ldots;$$

le carré de l'erreur moyenne est par définition

$$m^2 = \frac{[\varepsilon^2]}{n}. \tag{15}$$

Soient x_0 la moyenne arithmétique des mesures, v, v', v'' les résidus

$$v = \mu - x_0, \qquad v' = \mu' - x_0, \qquad v'' = \mu'' - x_0, \qquad \ldots,$$

et E la différence $x_0 - \xi$; on a

$$\begin{aligned} \varepsilon &= v + \mathrm{E}, \\ \varepsilon' &= v' + \mathrm{E}, \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Donc

$$nm^2 = [v^2] + 2\mathrm{E}[v] + n\mathrm{E}^2. \tag{16}$$

Or E, erreur de la moyenne, est la moyenne des erreurs

$$\mathrm{E} = \frac{\varepsilon + \varepsilon' + \ldots}{n}.$$

Donc

$$\mathrm{E}^2 = \frac{[\varepsilon^2]}{n^2} + \frac{2[\varepsilon^{(i)}\varepsilon^{(j)}]}{n^2}.$$

Nous admettrons que le dernier terme est nul, puisque, les erreurs égales et de signes contraires étant également possibles, la valeur probable de $[\varepsilon^{(i)}\varepsilon^{(j)}]$ est nulle. Nous observerons aussi que par définition $[v]$ est nulle. L'équation (16) devient donc

$$nm^2 = [v^2] + m^2.$$

On en tire

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}, \tag{17}$$

Quelque incertitude qu'il puisse rester sur l'exactitude de cette formule, elle a été universellement adoptée.

32. Application des règles données aux § 30 et 31. — Bessel a fait quarante déterminations directes du diamètre de l'anneau de Saturne. Les résultats de ces mesures rendus comparables sont inscrits dans le Tableau suivant :

38″,91	39″,35	39″,41	39″,02
39,32	39,25	39,40	39,01
38,93	39,14	39,36	38,86
39,31	39,47	39,20	39,51
39,17	39,29	39,42	39,21
39,04	39,32	39,30	39,17
39,57	39,40	39,41	39,60
39,46	39,33	39,43	39,54
39,30	39,28	39,43	39,45
39,03	39,62	39,36	39,72

La moyenne de ces quarante déterminations est

$$x_0 = 39'',308.$$

En retranchant ce nombre des résultats des mesures, on obtient les résidus suivants, exprimés en centièmes de seconde,

−40	4	10	−29
1	− 6	9	−30
−38	−17	5	−45
0	16	−11	20
−14	− 2	11	−10
−27	1	− 1	−14
26	9	10	29
15	2	12	23
− 1	− 3	12	14
−28	31	5	41

La somme des carrés de ces résidus est

$$[v^2] = 1,5884.$$

On en déduit

$$m = \sqrt{\frac{1,5884}{39}} = 0'',202, \qquad m_0 = \frac{0'',202}{\sqrt{40}} = 0'',032,$$

$$r = 0'',202.0,6745 = 0'',136, \qquad r_0 = \frac{0''.136}{\sqrt{40}} = 0'',022.$$

La probabilité que l'erreur de la moyenne ne dépasse pas Δ est

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-h_0\Delta}^{+h_0\Delta} e^{-t^2}\,dt.$$

Ayant

$$r_0 = 0'',022,$$

on conclut

$$h_0 = \frac{0,4769}{0'',022}$$

et

$$h_0\Delta = \frac{0,4769\,\Delta}{0'',22}.$$

D'après les nombres donnés au § 15, il y a 9 à parier contre 1 que l'erreur Δ ne dépasse pas

$$\frac{1,163 \times 0'',022}{0,4769} = 0'',06;$$

il y a 99 à parier contre 1 qu'elle ne dépasse pas

$$\frac{1,822 \times 0'',022}{0,4769} = 0'',09;$$

il y a 999 à parier contre 1 qu'elle ne dépasse pas

$$\frac{2,326 \times 0'',022}{0,4769} = 0'',11,$$

et si l'on voulait la probabilité que l'erreur ne dépasse pas 1″, il faudrait faire

$$h_0\Delta = \frac{0,4769}{0,022} = 21.$$

La probabilité serait alors tellement voisine de la certitude qu'elle se confondrait pratiquement avec elle.

Il faut bien remarquer que m_0 et r_0, déduits des formules (14), tendent nécessairement vers 0 quand le nombre des observations augmente indéfiniment. Il ne faudrait pas en conclure que l'on peut obtenir autant de précision que l'on veut en multipliant les mesures : *Rien ne prouve que les hypothèses sur lesquelles est fondée la théorie des erreurs soient absolument réalisées; on doit même admettre qu'elles ne le sont jamais entièrement.*

33. **Poids des observations.** — On dit que *des observations de même espèce ont même poids quand elles ont la même erreur moyenne.*

Prenons comme type une observation fictive, et représentons par m_1 son erreur moyenne. *Si une autre observation a la même erreur moyenne que la moyenne de p des premières, on dit qu'elle a le poids p.* Si m est cette erreur moyenne,

$$m_1^2 = pm^2.$$

Le poids est donc proportionnel au carré de l'inverse de l'erreur moyenne et, par suite, au carré de la mesure de la précision.

34. **Valeur la plus probable d'une quantité mesurée directement, si les observations ont des poids différents.** — Soient μ, μ', μ'', ... les résultats de n mesures, p, p', p'', ... leurs poids. On demande la valeur la plus probable de la quantité mesurée. On peut regarder μ comme la moyenne de p observations types de poids 1, μ' comme la moyenne de p', ... On sera donc dans les mêmes conditions que si l'on avait $p + p' + \ldots$ observations de même poids, la somme des p premières étant $p\mu$, celle des p' suivantes $p'\mu$, ... La valeur x_0 la plus probable de la quantité mesurée est donc

$$x_0 = \frac{[p\mu]}{[p]}. \tag{18}$$

Le poids de cette valeur est

$$[p]. \tag{19}$$

Son erreur moyenne est

$$m_0 = \frac{m_1}{\sqrt{[p]}}.$$

Quant à l'erreur moyenne m_1 de l'observation type, on peut l'obtenir approximativement comme il suit : soit v le résidu $\mu - x_0$ correspondant à l'observation de poids p_1 d'erreur moyenne m. Si l'on remplaçait cette observation de poids p par p observations de poids 1, elles donneraient des résidus $v_1, v_2, \ldots, v_p$, et

comme on a

$$m_1^2 = pm^2,$$

on peut admettre plus ou moins grossièrement que

$$\varepsilon_1^2 = p\varepsilon^2.$$

Or, si l'on connaissait les résidus ε, ε_1, ..., on aurait, les observations qui les auraient fournies étant de même poids,

$$m_1 = \sqrt{\frac{[\varepsilon_1^2]}{n-1}}.$$

Donc

$$m_1 = \sqrt{\frac{[p\varepsilon^2]}{n-1}}. \tag{20}$$

On en déduit

$$m = \sqrt{\frac{[p\varepsilon^2]}{(n-1)p}} \tag{21}$$

et

$$m_0 = \sqrt{\frac{[p\varepsilon^2]}{(n-1)[p]}}. \tag{22}$$

Il est manifeste que ces valeurs ne sont qu'approximatives, et il ne faut pas leur attacher plus d'importance qu'elles n'en ont.

35. **Détermination d'inconnues liées par des équations données à des quantités mesurées directement.** — Nous avons indiqué au § 28 à quelles conditions doivent satisfaire les valeurs les plus probables d'inconnues déterminées par des équations entre ces inconnues et des quantités mesurées directement.

Dans la pratique, on remplace les équations données par des équations linéaires, comme il suit. On déduit d'abord d'équations en nombre égal à celui des inconnues des valeurs approchées x_1, y_1, z_1, ... de ces inconnues. Si l'on pose ensuite

$$x = x_1 + \xi, \qquad y = y_1 + \eta, \qquad z = z_1 + \zeta, \qquad \ldots,$$

une des équations

$$f(x, y, z, \ldots) = \mathrm{M}$$

deviendra

$$f(x_1 + \xi, y_1 + \eta, z_1 + \zeta, \ldots) = \mathrm{M}.$$

On développe le premier membre par la formule de Taylor suivant les puissances de ξ, η, ζ, ... A l'ordinaire, on peut négliger les termes d'un ordre supérieur au premier par rapport à ces quantités. S'il en est ainsi, l'équation devient

$$a\xi + b\eta + c\zeta + \ldots = M',$$

où

$$M' = M - f(x_1, y_1, z_1, \ldots).$$

Le terme $f(x_1, y_1, z_1, \ldots)$ étant exactement connu, on peut regarder M′ comme mesuré directement, puisque l'erreur de M′ est égale à celle de M. On aura donc *remplacé le système des équations proposées par un système d'équations du premier degré où les coefficients des inconnues sont donnés exactement, et les termes constants déterminés par des mesures directes.*

36. **Valeurs les plus probables d'inconnues déterminées par des équations linéaires. Équations normales.** — Ayant les équations

$$\left\{\begin{array}{l} ax + by + cz + \ldots + n = 0, \\ a'x + b'y + c'z + \ldots + n' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right. \tag{23}$$

où n, n', n'' sont mesurés directement, et a, b, ... des coefficients donnés, le nombre des équations étant très grand par rapport au nombre des inconnues, en déduire les valeurs les plus probables des inconnues x, y, z, ... Nous supposerons d'abord que les observations qui ont donné n, n', ... sont de même poids.

Les valeurs les plus probables de x, y, z, ..., d'après le § 28, rendent minimum la somme des carrés des premiers membres des équations (23). Elles en annulent les dérivées partielles par rapport à x, y, z, ... Si nous désignons par φ, φ', φ'', ... les valeurs que prennent ces premiers membres pour ces valeurs des x, y, z, ..., nous obtenons immédiatement les équations

$$[a\varphi] = 0, \quad [b\varphi] = 0, \quad [c\varphi] = 0, \quad \ldots, \tag{24}$$

que l'on appelle *équations normales* et qui, écrites explicitement, sont

$$\left\{\begin{array}{l} [aa]x + [ab]y + [ac]z + \ldots + [an] = 0, \\ [ba]x + [bb]y + [bc]z + \ldots + [bn] = 0, \\ [ca]x + [cb]y + [cc]z + \ldots + [cn] = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\

Le nombre de ces équations normales est égal à celui des inconnues. Leur résolution donnera les valeurs les plus probables de $x, y, z, \ldots$.

La formation de ces équations est longue et pénible. Si μ désigne le nombre des équations (23) et ϖ celui des inconnues, le nombre des multiplications à faire pour le calcul des coefficients est

$$\frac{\mu\varpi(\varpi+3)}{2}.$$

On peut remplacer les multiplications par des carrés au moyen de la relation

$$rs = \left(\frac{r+s}{2}\right)^2 - \left(\frac{r-s}{2}\right)^2.$$

Si l'on emploie ce procédé, qui permet d'utiliser une table de carrés, le nombre des carrés à obtenir est

$$\mu\varpi(\varpi+2);$$

le rapport de ce nombre à celui des multiplications est

$$\frac{2\varpi+4}{\varpi+3},$$

nombre un peu inférieur à 2.

On obtient de précieuses vérifications comme il suit. Posant

$$\begin{aligned} &a+b+c+\ldots=s,\\ &a'+b'+c'+\ldots=s',\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

on a visiblement

$$(26)\qquad \begin{cases} [aa]+[ab]+\ldots=[as],\\ [ba]+[bb]+\ldots=[bs],\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ [as]+[bs]+\ldots=[ss],\\ [an]+[bn]+\ldots=[sn]. \end{cases}$$

37. Erreur moyenne d'une somme. — *Si deux quantités x, x_1 ont les erreurs moyennes ε, ε_1, la somme $\pm x \pm x_1$ a l'erreur moyenne* E *donnée par*

$$E^2 = \varepsilon^2 + \varepsilon_1^2.$$

Considérons, en effet, un grand nombre n d'observations de x,

comportant des erreurs Δ, Δ', Δ'', ... et autant d'observations correspondantes de x_1, comportant des erreurs Δ_1, Δ'_1, Δ''_1, ... Les erreurs de $\pm x \pm x_1$ seront

$$\pm\Delta \pm \Delta_1, \quad \pm\Delta' \pm \Delta'_1, \quad \pm\Delta'' \pm \Delta''_1, \quad \ldots,$$

et l'erreur moyenne E est donnée par

$$r\mathrm{E}^2 = (\pm\Delta \pm \Delta_1)^2 + (\pm\Delta' \pm \Delta'_1)^2 + \ldots$$

ou

$$n\mathrm{E}^2 = [\Delta^2] + [\Delta_1^2] \pm 2[\Delta\Delta_1]. \tag{27}$$

La valeur probable du dernier terme est o, puisque les erreurs sont probablement égales deux à deux et de signes contraires, de sorte qu'il se trouve probablement dans la somme $[\Delta\Delta_1]$ les quatre termes

$$\Delta^{(i)}\Delta_1^{(i)}, \quad \Delta^{(i)}(-\Delta_1^{(i)}), \quad (-\Delta^{(i)})\Delta_1^{(i)}, \quad (-\Delta^{(i)})(-\Delta_1^{(i)}),$$

dont la somme est nulle.

Comme on a

$$[\Delta^2] = n\varepsilon^2, \qquad [\Delta_1^2] = n\varepsilon_1^2,$$

l'équation (27) devient

$$\mathrm{E}^2 = \varepsilon^2 + \varepsilon_1^2. \tag{28}$$

Cette relation s'étend d'elle-même à la somme de plusieurs quantités x, x_1, x_2, ... et à une combinaison linéaire

$$ax + a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots \tag{29}$$

de ces quantités. L'erreur moyenne E de cette fonction est donnée par

$$\mathrm{E}^2 = a^2\varepsilon^2 + a_1^2\varepsilon_1^2 + a_2^2\varepsilon_2^2 + \ldots, \tag{30}$$

et si les erreurs moyennes ε, ε_1, ε_2, ... sont égales, on a

$$\mathrm{E} = \varepsilon\sqrt{[a^2]}. \tag{31}$$

38. Détermination des poids des inconnues. — Ce lemme établi, revenons à la question traitée au § 36 et cherchons les poids des diverses inconnues. Soient m l'erreur moyenne d'une observation à laquelle nous attribuons le poids 1, m_x celle de x, p_x le poids

de x. On a, par définition,

$$p_x = \frac{m^2}{m_x^2}. \tag{32}$$

Cela étant, remplaçons dans les équations normales (25) $[an]$ par -1, $[bn]$, $[cn]$, ... par 0, et désignons par Q, Q′, Q″, ... les nouvelles valeurs des inconnues, de sorte que

$$\left\{\begin{array}{l} [aa]Q + [ab]Q' + [ac]Q'' + \ldots - 1 = 0, \\ [ba]Q + [bb]Q' + [bc]Q'' + \ldots \quad = 0, \\ [ca]Q + [cb]Q' + [cc]Q'' + \ldots \quad = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \tag{33}$$

Si l'on multiplie les équations normales respectivement par Q, Q′, Q″, ... et qu'on les additionne membre à membre, on trouve, en tenant compte des équations (33),

$$x + [an]Q + [bn]Q' + [cn]Q'' + \ldots = 0,$$

qui s'écrit

$$x + \alpha n + \alpha' n' + \alpha'' n'' + \ldots = 0, \tag{34}$$

en posant

$$\left\{\begin{array}{l} aQ + bQ' + cQ'' + \ldots = \alpha, \\ a'Q + b'Q' + c'Q'' + \ldots = \alpha', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \tag{35}$$

Les coefficients α, α', α'', ... indépendants de n, n', n'', ... satisfont manifestement aux conditions

$$[a\alpha] = 1, \quad [b\alpha] = 0, \quad [c\alpha] = 0, \quad \ldots, \quad [\alpha\alpha] = Q. \tag{36}$$

Or le lemme du paragraphe précédent donne

$$m_x = m\sqrt{[\alpha\alpha]} = m\sqrt{Q}.$$

Donc

$$p_x = \frac{m^2}{m_x^2} = \frac{1}{Q}. \tag{37}$$

On trouvera de même les poids p_y, p_z, ... des autres inconnues par la résolution de systèmes analogues au système (33).

39. Détermination des erreurs moyennes des observations et des inconnues. — Soient u, u', u'', ... les erreurs vraies des observations que l'on obtiendrait en substituant à x, y, z, ... dans les

premiers membres des équations (23) leurs valeurs exactes $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$, ... Nous désignons toujours par x, y, z, ... les valeurs les plus probables déduites des équations normales. Soit m l'erreur moyenne d'une observation, on a, par définition,

$$\mu m^2 = [u^2]. \tag{38}$$

Les erreurs u, u', u'', ... sont données par les formules

$$\left\{\begin{array}{l} a(x+\Delta x)+b(y+\Delta y)+\ldots+n=u, \\ a'(x+\Delta x)+b'(y+\Delta y)+\ldots+n'=u', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \tag{39}$$

On en déduit, en multipliant par u, u', u'', ... et additionnant,

$$\left\{\begin{array}{l} [u^2]= \quad [au]x+[bu]y+\ldots+[nu] \\ \qquad\quad +[au]\Delta x+[bu]\Delta y+\ldots. \end{array}\right. \tag{40}$$

D'autre part, v, v', v'', ... sont définis par les formules

$$\left\{\begin{array}{l} ax+by+cz+\ldots+n=v, \\ a'x+b'y+c'z+\ldots+n'=v', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right. \tag{41}$$

et, en multipliant ces équations par u, u', u'', ... et les additionnant, on trouve

$$[au]x+[bu]y+\ldots+[nu]=[uv].$$

Si l'on multiplie les équations (39) par v, v', v'', ... et qu'on les additionne membre à membre, on trouve, en tenant compte des équations (24),

$$[vn]=[vu].$$

Si l'on multiplie les équations (41) par v, v', v'', ... et qu'on les additionne, on trouve de même

$$[vn]=[v^2].$$

Il en résulte que

$$\mu m^2=[v^2]+[au]\Delta x+[bu]\Delta y+\ldots. \tag{42}$$

D'autre part, si l'on opère sur les équations (39) comme on l'a fait sur les équations (23) pour obtenir les équations normales, on trouve, en tenant compte de ce que x, y, z satisfont à ces

équations normales,

$$[aa]\Delta x + [ab]\Delta y + \ldots = [au],$$
$$[ba]\Delta x + [bb]\Delta y + \ldots = [bu],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

qui ne diffèrent des équations normales qu'en ce que x, y, z, ... sont remplacés par Δx, Δy, Δz, ..., n, n', n'', ... par $-u$, $-u'$, $-u''$. On en déduira donc une équation toute semblable à l'équation (34), savoir

$$\Delta x = \alpha u + \alpha' u' + \alpha'' u'' + \ldots.$$

Comme

$$[au] = au + a'u' + a''u'' + \ldots,$$

il s'ensuit que

$$[au]\Delta x = a\alpha u^2 + a'\alpha' u'^2 + \ldots + \alpha a' uu' + \ldots.$$

Ne connaissant pas les valeurs des différents termes, on les remplace par leurs valeurs moyennes. Celle d'un terme en uu' est nulle en raison de ce que les erreurs égales et de signes contraires sont également probables; celle d'un terme tel que $a\alpha u^2$ est $a\alpha m^2$. On remplacera donc $[au]\Delta x$ par $[a\alpha]m^2$ et, à cause de l'équation (36), par m^2; de même, on remplacera $[bu]\Delta y$ par m^2 et ainsi des autres. On aura donc

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{\mu - \varpi}}. \tag{43}$$

On a ensuite

$$m_x = \frac{m}{p_x}, \qquad m_y = \frac{m}{p_y}, \qquad \ldots. \tag{44}$$

Telles sont les formules que l'on a coutume d'appliquer. *Nous ne saurions trop insister sur le degré d'incertitude qu'elles comportent, tout en observant qu'elles sont d'autant plus exactes que* μ *est plus grand.*

40. Application à un exemple. — Pour bien montrer la suite des calculs à faire, sans être embarrassé par la longueur des calculs, Gauss a appliqué sa méthode à la résolution d'un système de quatre équations du premier degré à trois inconnues, à coefficients entiers. Nous n'avons pas besoin de dire qu'un tel cas ne se présente pas dans la pratique et que, si l'on veut que les résultats

aient quelque portée, il faut que le nombre des équations soit très notablement supérieur à celui des inconnues. Les équations sont les suivantes :

$$(23') \qquad \begin{cases} x - y + 2z - 3 = 0, \\ 3x + 2y - 5z - 5 = 0, \\ 4x + y + 4z - 21 = 0, \\ -x + 3y + 3z - 14 = 0. \end{cases}$$

Les équations normales sont

$$(25') \qquad \begin{cases} 27x + 6y - 88 = 0, \\ 6x + 15y + z - 70 = 0, \\ y + 54z - 107 = 0. \end{cases}$$

Les vérifications se font comme il suit :

On a

$$(26') \qquad \begin{cases} s = a + b + c = 2, \\ s' = a' + b' + c' = 0, \\ s'' = a'' + b'' + c'' = 9, \\ s''' = a''' + b''' + c''' = 5, \\ [an] = -88, \quad [bn] = -70, \quad [cn] = -107; \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} [as] = 33 = 27 + 6 + 0, \\ [bs] = 22 = 6 + 15 + 1, \\ [cs] = 55 = 0 + 1 + 54, \\ [ss] = 110 = 33 + 22 + 55, \\ [sn] = -265 = -88 - 70 - 107. \end{cases}$$

La résolution des équations normales donne

$$x = \frac{49154}{19899} = 2,470, \qquad y = \frac{2617}{737} = 3,551, \qquad z = \frac{12707}{6633} = 1,916.$$

Pour trouver le poids de x, on résout les équations

$$(33') \qquad \begin{cases} 27Q + 6Q' = -1, \\ 6Q + 15Q' + Q'' = 0, \\ Q' + 54Q'' = 0. \end{cases}$$

On en tire

$$(37') \qquad p_x = \frac{1}{Q} = -\frac{19899}{809} = 24,6.$$

De même la résolution du système d'équations

$$\begin{aligned} 27\,Q_1 + 6\,Q'_1 &= 0, \\ 6\,Q_1 + 15\,Q'_1 + Q''_1 &= -1, \\ Q'_1 + 54\,Q''_1 &= 0 \end{aligned}$$

donne

$$p_y = \frac{1}{Q'_1} = \frac{737}{54} = 13,6,$$

et la résolution du système

$$\begin{aligned} 27\,Q_2 + 6\,Q'_2 &= 0, \\ 6\,Q_2 + 15\,Q'_2 + Q''_2 &= 0, \\ Q'_2 + 54\,Q''_2 &= -1 \end{aligned}$$

donne

$$p_2 = \frac{1}{Q''_2} = \frac{2211}{41} = 53,9.$$

Pour déterminer les erreurs moyennes, on remplace, dans les premiers membres des équations (23'), x, y, z par les valeurs les plus probables. Les résidus sont

$$-0,249, \quad -0,068, \quad +0,095, \quad -0,069.$$

La somme de leurs carrés est

$$[v^2] = 0,0804.$$

On en tire

$$(43') \qquad m = \sqrt{\frac{0,0804}{4-3}} = 0,284.$$

Les erreurs moyennes des inconnues sont ensuite

$$(44') \quad m_x = \frac{m}{\sqrt{p_x}} = 0,057, \qquad m_y = \frac{m}{\sqrt{p_y}} = 0,077, \qquad m_z = \frac{m}{\sqrt{p_z}} = 0,039.$$

Si l'on multiplie ces erreurs moyennes par la constante 0,6745, on obtient les erreurs probables

$$r = 0,192, \qquad r_x = 0,038, \qquad r_y = 0,052, \qquad r_z = 0,026.$$

41. **Cas où les observations ont des poids différents.** — Supposons que les observations n'aient pas le même poids. Soient p le poids de l'une d'elles, m son erreur moyenne, m_1 l'erreur moyenne

d'une observation de poids 1. On a

$$m = \frac{m_1}{\sqrt{p}}.$$

Donc, si n est le nombre observé, l'erreur moyenne de $n\sqrt{p}$ est m_1.

Si donc on multiplie chaque équation par la racine carrée du poids de l'observation correspondante, on pourra considérer toutes les équations nouvelles comme provenant d'observations de poids 1. L'erreur moyenne que l'on trouvera ensuite par l'application des règles des §§ 36, 38, 39 sera m_1; les poids des inconnues seront rapportés au poids de l'observation fictive d'erreur moyenne m_1.

42. Notations introduites par Gauss dans la résolution des équations normales. — Reprenons les équations normales et, pour plus de clarté, supposons qu'il y ait quatre inconnues,

$$(45)\qquad \begin{cases} [aa]x + [ab]y + [ac]z + [ad]t + [an] = 0, \\ [ba]x + [bb]y + [bc]z + [bd]t + [bn] = 0, \\ [ca]x + [cb]y + [cc]z + [cd]t + [cn] = 0, \\ [da]x + [db]y + [dc]z + [dd]t + [dn] = 0. \end{cases}$$

De la première on tirera x ainsi

$$(46)\qquad x + \frac{[ab]}{[aa]}y + \frac{[ac]}{[aa]}z + \frac{[ad]}{[aa]}t + \frac{[an]}{[aa]} = 0.$$

On portera purement et simplement cette valeur de x dans les trois autres équations, qui deviendront

$$(47)\qquad \begin{cases} [bb.1]y + [bc.1]z + [bd.1]t + [bn.1] = 0, \\ [cb.1]y + [cc.1]z + [cd.1]t + [cn.1] = 0, \\ [db.1]y + [dc.1]z + [dd.1]t + [dn.1] = 0, \end{cases}$$

la signification des symboles $[bb.1]$, $[bc.1]$, ... étant assez claire.

On résoudra la première de ces trois équations par rapport à y ainsi

$$(46^*)\qquad y + \frac{[bc.1]}{[bb.1]}z + \frac{[bd.1]}{[bb.1]}t + \frac{[bn.1]}{[bb.1]} = 0$$

et l'on portera cette valeur de y dans les deux autres, que l'on

écrira

$$(48)\qquad \begin{cases} [cc.2]z + [cd.2]t + [cn.2] = 0, \\ [dc.2]z + [dd.2]t + [dn.2] = 0. \end{cases}$$

On résoudra la première par rapport à z

$$(46^{**})\qquad z + \frac{[cd.2]}{[cc.2]}t + \frac{[cn.2]}{[cc.2]} = 0,$$

et l'on portera cette valeur dans la seconde qui s'écrira

$$(49)\qquad [dd.3]t + [dn.3] = 0.$$

L'équation (49) donnera

$$(46^{***})\qquad t + \frac{[dn.3]}{[dd.3]} = 0;$$

puis les équations (46**), (46*), (46) donneront successivement z, y, x.

43. **Vérification de tout le calcul.** — Substituons, dans les premiers membres des équations données (23), les valeurs trouvées et désignons comme plus haut par $v, v', v'', \ldots$ les résidus. Les quantités $x, y, z, \ldots, v, v', \ldots$ satisfont rigoureusement aux équations (41), savoir :

$$\begin{aligned} &ax + by + cz + \ldots + n = v, \\ &a'x + b'y + c'z + \ldots + n' = v', \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Si on les multiplie par $n, n', n'', \ldots$ et qu'on les ajoute, on aura

$$(50)\qquad [an]x + [bn]y + [cn]z + [dn]t + [nn] = [vn] = [v^2].$$

Si l'on joint cette équation (50) *aux équations normales et qu'on y fasse les substitutions successives, on devra obtenir une identité.*

44. **Détermination générale des poids des inconnues.** — Reprenons les équations (46), (46*), (46**), (46***), multiplions-les respectivement par 1, A′, A″, A‴. Ajoutons-les membre à membre et choisissons les indéterminées A′, A″, A‴ de manière à annuler, dans l'équation ainsi obtenue, les coefficients de y, z, t, ce qui

donne

$$(51)\qquad \begin{cases} 0 = \dfrac{[ab]}{[aa]} + A', \\ 0 = \dfrac{[ac]}{[aa]} + \dfrac{[bc.1]}{[bb.1]} A' + A'', \\ 0 = \dfrac{[ad]}{[aa]} + \dfrac{[bd.1]}{[bb.1]} A' + \dfrac{[cd.2]}{[cc.2]} A'' + A'''. \end{cases}$$

Multiplions de même les équations (46*), (46**), (46***) par 1, B'', B'''. Ajoutons-les et égalons à zéro les coefficients de z et t dans l'équation nouvelle, ce qui donne

$$(51)\qquad \begin{cases} 0 = \dfrac{[bc.1]}{[bb.1]} + B'', \\ 0 = \dfrac{[bd.1]}{[bb.1]} + \dfrac{[cd.2]}{[cc.2]} B'' + B'''. \end{cases}$$

Enfin, ajoutons membre à membre les équations (46**), (46***), après avoir multiplié la première par 1, la seconde par C''' et égalons à zéro le coefficient de t,

$$(51)\qquad 0 = \frac{[cd.2]}{[cc.2]} + C''',$$

nous aurons trois équations, donnant respectivement x, y, z, qui, associées à l'équation (46***), forment le système

$$(52)\qquad \begin{cases} 0 = x + \dfrac{[an]}{[aa]} + \dfrac{[bn.1]}{[bb.1]} A' + \dfrac{[cn.2]}{[cc.2]} A'' + \dfrac{[dn.3]}{[dd.3]} A''', \\ 0 = y + \dfrac{[bn.1]}{[bb.1]} + \dfrac{[cn.2]}{[cc.2]} B'' + \dfrac{[dn.3]}{[dd.3]} B''', \\ 0 = z + \dfrac{[cn.2]}{[cc.2]} + \dfrac{[dn.3]}{[dd.3]} C''', \\ 0 = t + \dfrac{[dn.3]}{[dd.3]}. \end{cases}$$

Portons ces valeurs de x, y, z, t dans l'équation (46), elle devra être satisfaite quelles que soient les valeurs de $[an]$, $[bn.1]$, $[cn.2]$, $[dn.3]$ dont les coefficients A', A'', A''', B'', ... sont indépendants; il en résulte que

$$(53)\qquad \begin{cases} 0 = A' + \dfrac{[ab]}{[aa]}, \\ 0 = A'' + \dfrac{[ab]}{[aa]} B'' + \dfrac{[ac]}{[aa]}, \\ 0 = A''' + \dfrac{[ab]}{[aa]} B''' + \dfrac{[ac]}{[aa]} C''' + \dfrac{[ad]}{[aa]}. \end{cases}$$

Si l'on porte les valeurs de y, z, t dans l'équation (46*), on a de même

$$(53)\qquad \begin{cases} 0 = B'' + \dfrac{[bc.1]}{[bb.1]}, \\ 0 = B''' + \dfrac{[bc.1]}{[bb.1]}C''' + \dfrac{[bd.1]}{[bb.1]}. \end{cases}$$

Si l'on porte z et t dans l'équation (46**), on a enfin

$$(53)\qquad 0 = C''' + \frac{[cd.2]}{[cc.2]}.$$

Les équations (3), (5), (6) du groupe (53) sont identiques aux trois premières équations normales (46) où l'on aurait annulé $[an]$, $[bn.1]$, $[cn.2]$, et remplacé x, y, z, t par A''', B''', C''', 1. Ces trois premières équations (46), dans leur ensemble, sont équivalentes aux trois premières équations normales (25), de sorte que

$$\begin{aligned} [aa]A''' + [ab]B''' + [ac]C''' + [ad] &= 0, \\ [ba]A''' + [bb]B''' + [bc]C''' + [bd] &= 0, \\ [ca]A''' + [cb]B''' + [cc]C''' + [cd] &= 0. \end{aligned}$$

On doit remarquer que les valeurs de A''', B''', C''' sont les coefficients de t dans les valeurs de x, y, z tirées des équations (25) ou des trois équations (46), (46*), (46**). Cela étant, si l'on multiplie les équations (25) par A''', B''', C''', 1, les termes en x, en y, en z disparaîtront; le coefficient de t sera le même que l'on trouvait tout à l'heure en remplaçant dans la dernière x, y, z par leurs valeurs tirées des trois premières; et l'équation obtenue devra être identique à (49)

$$[dd.3]t + [dn.3] = 0.$$

Le coefficient de t dans ces deux équations étant le même, il s'ensuit que les termes connus sont égaux, ou que

$$(54)\qquad [an]A''' + [bn]B''' + [cn]C''' + [dn] = [dn.3].$$

De même, en remarquant que les équations (2) et (4) du groupe (53) se déduisent des deux premières équations (46), en faisant $[an] = [bn.1] = 0$, $z = 1$, $t = 0$, on en conclut

$$\begin{aligned} [aa]A'' + [ab]B'' + [ac] &= 0, \\ [ba]A'' + [bb]B'' + [bc] &= 0. \end{aligned}$$

Donc, si l'on multiplie les trois premières équations normales par A'', B'', 1, les termes en x et y disparaîtront, l'équation restante devra être identique à la première équation (48)

$$[cc.2]z + [cd.2]t + [cn.2] = 0,$$

et, comme un raisonnement identique au précédent montrerait que les coefficients de z et t sont les mêmes dans les deux équations, il s'ensuit que

$$[an]A'' + [bn]B'' + [cn]C'' = [cn.2]. \tag{54}$$

De même encore

$$[an]A' + [bn] = [bn.1]. \tag{54}$$

Or, on a vu que $\frac{1}{p_x}$ est la valeur de x quand on fait $[an] = -1$, $[bn] = [cn] = [dn] = 0$. Mais alors, d'après les équations (54),

$$A''' = -[dn.3],$$
$$A'' = -[cn.2],$$
$$A' = -[bn.1].$$

Donc la première équation (52), si l'on y introduit ces hypothèses, donne

$$\frac{1}{p_x} = \frac{1}{[aa]} + \frac{A'^2}{[bb.1]} + \frac{A''^2}{[cc.2]} + \frac{A'''^2}{[dd.3]}.$$

De même, $\frac{1}{p_y}$ s'obtient en remplaçant, dans l'expression de y, $[bn]$ par -1, $[an]$, $[cn]$, $[dn]$ par zéro. D'où l'on déduit

$$B''' = -[dn.3],$$
$$B'' = -[cn.2],$$
$$1 = -[bn.1],$$

et par suite

$$\frac{1}{p_y} = \frac{1}{[bb.1]} + \frac{B''^2}{[cc.2]} + \frac{B'''^2}{[dd.3]}.$$

On trouve de même

$$\frac{1}{p_z} = \frac{1}{[cc.2]} + \frac{C'''^2}{[dd.3]},$$
$$\frac{1}{p_t} = \frac{1}{[dd.3]}.$$

45. Application de cette méthode à l'exemple traité au § 40. — La première équation normale donne

$$x = -\frac{2}{9}y + \frac{88}{27}. \tag{46'}$$

En substituant purement et simplement dans les deux autres, on trouve

$$\begin{cases} \frac{41}{3}y + z - \frac{454}{9} = 0, \\ y + 54z - 107 = 0. \end{cases} \tag{47'}$$

Tirant y de la première et substituant dans la seconde, on trouve

$$\frac{2211}{41}z + \frac{12707}{123} = 0. \tag{48'}$$

On a donc

$$[aa] = 27, \qquad [bb.1] = \frac{41}{3}, \qquad [cc.2] = \frac{2211}{41},$$

et successivement

$$z = \frac{12707}{6633}, \qquad y = \frac{2617}{737}, \qquad x = \frac{49154}{19899}.$$

Rassemblons les équations résolues par rapport à x, y, z, savoir

$$x + \frac{2}{9}y - \frac{88}{27} = 0,$$
$$y + \frac{3}{41}z - \frac{454}{123} = 0,$$
$$z - \frac{12707}{6633} = 0.$$

Multiplions la première par 1, la deuxième par A′, la troisième par A″, et, les ajoutant, égalons à zéro les coefficients de y et z, nous trouvons

$$\frac{2}{9} + A' = 0, \qquad \frac{3}{41}A' + A'' = 0.$$

Ajoutons de même la deuxième multipliée par 1, la troisième multipliée par B″ et égalons à zéro le coefficient de z, nous avons

$$\frac{3}{41} + B'' = 0.$$

Donc

$$A' = -\frac{2}{9}, \qquad A'' = \frac{2}{123}, \qquad B'' = -\frac{3}{41}.$$

Nous avons ensuite

$$\frac{1}{p_x} = \frac{1}{[aa]} + \frac{A'^2}{[bb.1]} + \frac{A''^2}{[cc.2]} = \frac{809}{19899},$$
$$\frac{1}{p_y} = \frac{1}{[bb.1]} + \frac{B''^2}{[cc.2]} = \frac{54}{737},$$
$$\frac{1}{p_z} = \frac{1}{[cc.2]} = \frac{41}{2211},$$

comme nous l'avons déjà trouvé.

46. **Méthode de Cauchy.** — On a fréquemment, en Astronomie et en Physique, à déduire la valeur la plus probable d'une quantité inconnue d'un système d'équations linéaires entre cette inconnue et des quantités mesurées directement. Soient

$$ax + n = 0, \qquad a'x + n' = 0, \qquad \ldots, \qquad a^{(p)}x + n^{(p)} = 0,$$

ces équations, où n, n', n'', ... sont les valeurs trouvées pour les quantités mesurées, a, a', a'', ... des coefficients exactement connus. L'application de la méthode des moindres carrés conduit à tirer x de l'équation obtenue en additionnant ces équations après les avoir multipliées respectivement par a, a', a'', ...

M. Tisserand a remarqué que, si les coefficients a, a', a'', ..., rendus tous de même signe, forment une progression arithmétique décroissante où le dernier terme soit très petit, *on obtient une valeur de x presque aussi probable en additionnant simplement les équations membre à membre après avoir supprimé celles dans lesquelles le coefficient de x est moindre que le tiers du plus grand.*

Soit, en effet,

$$a^{(i)} = a\left(1 - \frac{i}{p}\right).$$

Laplace a prouvé, à propos de la recherche de la loi de probabilité des erreurs, que si l'on additionne les équations données après les avoir multipliées par m, m', m'', ..., $m^{(p)}$, on aura la probabilité

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\Upsilon} e^{-t^2}\,dt.$$

que la valeur fournie pour x par l'équation ainsi obtenue ne sera pas en erreur de

$$\pm k\gamma\frac{\sqrt{[m^2]}}{[ma]},$$

k étant un nombre constant pour un système donné d'équations.

Pour comparer les probabilités des valeurs de x résultant de l'emploi de divers systèmes de multiplicateurs, il suffit donc de comparer les valeurs de

$$\mathrm{E}=\frac{\sqrt{[m^2]}}{[ma]}.$$

A. Si l'on applique la méthode des moindres carrés, on a

$$[m^2]=[a^2],\qquad [ma]=[a^2];$$

d'où

$$\mathrm{E}=\frac{1}{\sqrt{[a^2]}}=\frac{1}{a\sqrt{\frac{(p+1)(2p+1)}{bp}}},$$

ou approximativement, si p est grand,

$$\mathrm{E}=\frac{\sqrt{3}}{a\sqrt{p}}.$$

B. Si l'on fait tous les multiplicateurs égaux à 1, on a

$$[m^2]=p+1,\qquad [ma]=[a]=\frac{a(p+1)}{2}$$

et

$$\mathrm{E}=\frac{2}{a\sqrt{p+1}},$$

ou approximativement

$$\mathrm{E}=\frac{2}{a\sqrt{p}}.$$

C. Si, faisant les multiplicateurs égaux à 1, on néglige toutes les équations à partir de la $(k+1)^{\text{ième}}$, on a

$$[m^2]=k,\qquad [ma]=\frac{a}{2}\left(2-\frac{k-1}{p}\right)k;$$

d'où

$$\mathrm{E}=\frac{2p}{a\sqrt{k}(2p-k+1)}.$$

Le dénominateur est maximum quand

$$k = \frac{2}{3}p + \frac{1}{3}$$

ou

$$a^{(k)} = \frac{a}{3}\left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

et alors approximativement

$$\mathrm{E} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{1}{a\sqrt{p}}.$$

Dans cette troisième méthode, l'erreur E est donc minimum quand on supprime les équations pour lesquelles le coefficient de x est moindre que le tiers du plus grand.

Dans les trois méthodes, la probabilité est respectivement la même, que l'erreur soit comprise dans les limites

$$\frac{\pm k\gamma}{a\sqrt{p}}\sqrt{3}, \quad \frac{\pm k\gamma}{a\sqrt{p}}2, \quad \frac{\pm k\gamma}{a\sqrt{p}}\,\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Les erreurs, également probables, sont donc entre elles comme les nombres

$$\sqrt{3}, \quad 2, \quad \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}},$$

ou à peu près

$$17, \quad 20, \quad 18.$$

Il semble donc qu'il vaille mieux supprimer les équations dans lesquelles le coefficient de x est moindre que le tiers du plus grand que de les conserver, et l'avantage qu'offre la méthode des moindres carrés n'est pas tellement grand que l'on ne puisse fréquemment lui substituer la méthode très commode indiquée dans le présent paragraphe.

On applique cette méthode même dans des cas où les coefficients de x ne sont qu'approximativement en progression arithmétique. Elle rend en Physique et dans certaines questions d'Astronomie pratique de très réels services.

CHAPITRE III.

THÉORIE GÉNÉRALE DES INSTRUMENTS D'OPTIQUE.

47. Nous considérons un instrument d'Optique comme formé d'une série de surfaces sphériques réfringentes, dont les centres sont en ligne droite. Le cas d'une surface réfléchissante sera compris dans cette étude; il suffira de donner à l'indice de réfraction la valeur -1. Nous rapportons l'instrument à un système d'axes de coordonnées rectangulaires, l'axe des x, que nous nommons *axe de l'instrument,* passant par les centres de toutes les surfaces; le sens positif de cet axe sera celui de l'arrivée des rayons lumineux; nous n'envisageons d'ailleurs que des rayons peu inclinés sur l'axe. Nous montrerons d'abord, en suivant pas à pas la méthode indiquée par Gauss, que, en négligeant les quantités du troisième ordre par rapport aux inclinaisons des rayons sur l'axe, tout point lumineux, qui émet de la lumière homogène, donne une image, et que les images de points situés dans un plan perpendiculaire à l'axe sont elles-mêmes dans un plan perpendiculaire à l'axe. Nous obtiendrons, d'après Gauss, par l'introduction de certains points et plans particuliers, dits *points* et *plans principaux, foyers* et *plans focaux*, une construction simple du rayon émergent provenant d'un rayon incident donné, et aussi une construction simple de l'image d'un point donné.

Nous définirons encore d'autres éléments qui ont été introduits par Biot, par Bravais et par M. Listing, et nous montrerons les liaisons entre ces éléments et ceux de Gauss.

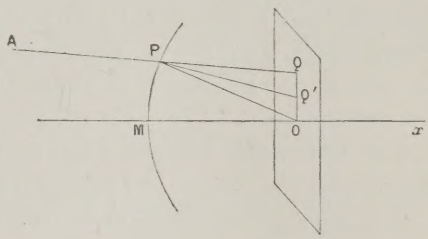
Nous appliquerons les formules générales au cas d'une lentille; nous nous occuperons de la combinaison de plusieurs instruments d'Optique et nous appliquerons les résultats au cas d'un système de lentilles. Après quoi, dans le Chapitre IV, étudiant les modifications que subit l'image d'un point par suite du changement de réfrangibilité des rayons lumineux, nous traiterons d'une manière générale de l'achromatisme.

Nous réserverons pour le Chapitre V l'étude des écarts entre la théorie et la réalité, résultant de ce que nous aurons négligé les quantités du troisième ordre, écarts connus sous le nom d'*aberration de sphéricité;* dans le Chapitre VI nous décrirons les principaux instruments utilisés en Astronomie.

48. **Équations des rayons incident et émergent.** — *a. Cas d'une réfraction unique.* — Soient

MP (*fig.* 1) la surface sphérique de séparation de deux milieux; O son centre;

Fig. 1.



$\frac{n'}{n}$ l'indice de réfraction relatif au passage du premier milieu dans le second;

AP un rayon incident;

PQ′ le rayon réfracté;

Q, Q′ les intersections de ces rayons avec un plan mené en O perpendiculairement à l'axe.

Convenons en outre que toute lettre désignant un point désignera aussi généralement l'abscisse x de ce point.

Soient

$$(1) \qquad y = \frac{\beta}{n}(x - \mathrm{M}) + b, \qquad z = \frac{\gamma}{n}(x - \mathrm{M}) + c$$

les équations d'un rayon incident, et

$$(2) \qquad y = \frac{\beta'}{n'}(x - \mathrm{M}) + b', \qquad z = \frac{\gamma'}{n'}(x - \mathrm{M}) + c'$$

celles du rayon réfracté.

Les rayons étant peu inclinés sur l'axe et peu éloignés de cet axe, attendu que les calottes sphériques utilisées comme surfaces de séparation ont toujours une corde petite par rapport à leurs rayons de courbure, β, γ, b, c sont de petites quantités.

Les deux rayons doivent passer au point P dont l'x est

$$M + r(1 - \cos\theta),$$

où

$$r = O - M,$$

et où θ désigne l'angle POM. En écrivant que pour cette valeur de x les valeurs de y sont égales, ainsi que celles de z, et négligeant les quantités du troisième ordre par rapport à θ, β, γ, on trouve

$$b' = b, \qquad c' = c.$$

On obtient ensuite β' et γ' en appliquant la loi des sinus comme il suit :

On a immédiatement les relations

$$\frac{\sin OPQ}{\sin OPQ'} = \frac{n'}{n},$$

$$OQ \sin\widehat{OQP} = PO \sin\widehat{OPQ}, \qquad OQ' \sin\widehat{OQ'P} = PO \sin\widehat{OPQ'};$$

d'où

$$OQ' = OQ \frac{n}{n'} \frac{\sin\widehat{OQP}}{\sin\widehat{OQ'P}}.$$

Les angles $\widehat{OQP}$, $\widehat{OQ'P}$ sont presque droits : en écrivant qu'il y a, entre les y, et aussi entre les z des points Q' et Q le même rapport qu'entre OQ' et OQ, et négligeant les quantités du troisième ordre, on trouve

$$(3) \qquad \beta' = \beta + \frac{n' - n}{M - O} b, \qquad \gamma' = \gamma + \frac{n' - n}{M - O} c.$$

b. Cas de plusieurs réfractions successives. — Soient M, M_1, M_2, ..., M_μ les sommets des surfaces de séparation des milieux

successifs, O, O_1, ..., O_μ leurs centres de courbure, $\frac{n_1}{n}$, $\frac{n_2}{n_1}$, ..., $\frac{n_{\mu+1}}{n_\mu}$ les indices de réfraction (¹).

Le Tableau suivant à deux colonnes renferme pour les rayons successifs la relation entre y et x, sous deux formes inscrites en face l'une de l'autre; dans la première colonne, on a mis en évidence le sommet de la surface par laquelle le rayon est réfracté; dans la seconde, le sommet de celle sur laquelle il est incident :

$$\text{(rayon incident)}\quad y = \frac{\beta}{n}(x - \mathrm{M}) + b,$$

$y = \frac{\beta_1}{n_1}(x - \mathrm{M}) + b,$	$y = \frac{\beta_1}{n_1}(x - \mathrm{M}_1) + b_1,$
$y = \frac{\beta_2}{n_2}(x - \mathrm{M}_1) + b_1,$	$y = \frac{\beta_2}{n_2}(x - \mathrm{M}_2) + b_2,$
.....	.....
$y = \frac{\beta_\mu}{n_\mu}(x - \mathrm{M}_{\mu-1}) + b_{\mu-1},$	$y = \frac{\beta_\mu}{n_\mu}(x - \mathrm{M}_\mu) + b_\mu.$

$$y = \frac{\beta_{\mu+1}}{n_{\mu+1}}(x - \mathrm{M}_\mu) + b_\mu \quad \text{(rayon émergent)},$$

Les équations entre z et x se déduisent des précédentes en changeant les b et les β en c et γ, et y en z.

Les formules (3) permettent de calculer les β et γ, les b et c consécutifs. En posant

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{M}_1 - \mathrm{M}}{n_1} = t_1, & \dfrac{\mathrm{M}_2 - \mathrm{M}_1}{n_2} = t_2, & \ldots, & \dfrac{\mathrm{M}_\mu - \mathrm{M}_{\mu-1}}{n_\mu} = t_\mu, \\ \dfrac{n_1 - n}{\mathrm{M} - \mathrm{O}} = u, & \dfrac{n_2 - n_1}{\mathrm{M}_1 - \mathrm{O}_1} = u_1, & \ldots, & \dfrac{n_{\mu+1} - n_\mu}{\mathrm{M}_\mu - \mathrm{O}_\mu} = u_\mu, \end{cases}$$

on a successivement

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \beta + ub, \\ b_1 &= b + t_1\beta_1, \\ \beta_2 &= \beta_1 + u_1 b_1, \\ b_2 &= b_1 + t_2\beta_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ b_\mu &= b_{\mu-1} + t_\mu\beta_\mu, \\ \beta_{\mu+1} &= \beta_\mu + u_\mu b_\mu, \end{aligned}$$

et des relations toutes semblables donnent les γ et les c.

(¹) Dans la théorie des ondulations, n, n_1, ..., n_μ sont les inverses des vitesses de la lumière dans les différents milieux; dans la théorie de l'émission, c'étaient ces vitesses elles-mêmes.

Ces relations permettent d'exprimer toutes les quantités β_i et b_i en fonction de b et de β. Si l'on envisage en effet la fraction continue suivante

$$u + \cfrac{1}{t_1 + \cfrac{1}{u_1 + \ddots + t_\mu + \cfrac{1}{u_\mu}}},$$

la première réduite $\frac{u}{1}$ donne par ses deux termes les coefficients de b et de β dans l'expression de β_1 ; la seconde réduite $\frac{ut_1+1}{t_1}$ donne de même, par ses deux termes, les coefficients de b et de β dans l'expression de b_1 ; et la loi de formation des réduites montre que les réduites successives donnent par leurs deux termes successivement les coefficients de b et de β dans β_2, b_2, ..., $\beta_{\mu+1}$. De sorte que, si $\frac{g}{h}$ est l'avant-dernière réduite et $\frac{k}{l}$ la dernière, on a

$$(5) \qquad \begin{cases} b_\mu = gb + h\beta, \\ \beta_{\mu+1} = kb + l\beta, \end{cases}$$

et, le nombre des réduites étant impair, on a la relation

$$(6) \qquad gl - kh = 1.$$

Les quatre quantités g, h, k, l, réduites à trois quantités distinctes par la relation (6), caractérisent l'instrument d'Optique considéré; avec n et $n_{\mu+1}$ qui ne dépendent pas de l'instrument, M et M_μ qui ne peuvent entrer que par leur différence, l'origine des coordonnées étant arbitraire, et qui par conséquent déterminent la longueur de l'instrument, elles permettent dans tous les cas de déduire le rayon émergent du rayon incident.

Désormais nous remplacerons fréquemment b_μ, $\beta_{\mu+1}$, c_μ, $\gamma_{\mu+1}$, $n_{\mu+1}$ par b', β', c', γ', n'.

49. Image d'un point. — Soient ξ, η, ζ les coordonnées d'un point lumineux. Le rayon incident (1) passera par ce point si

$$(7) \qquad \eta = \frac{\beta}{n}(\xi - M) + b, \qquad \zeta = \frac{\gamma}{n}(\xi - M) + c.$$

Les équations du rayon émergent seront

$$(8) \qquad y = \frac{\beta'}{n'}(x - M') + b', \qquad z = \frac{\gamma'}{n'}(x - M') + c',$$

et β', b', γ', c' auront les valeurs suivantes

$$(9) \qquad \begin{cases} b' = gb + h\beta, & c' = gc + h\gamma, \\ \beta' = kb + l\beta, & \gamma' = kc + l\gamma, \end{cases}$$

On peut, au moyen des équations (7) et (9), tirer b, b', β en fonction de β'; c, c', γ en fonction de γ'. Alors les équations (8) deviennent

$$(10) \qquad y = \frac{\beta'}{n'}(x - \xi') + \eta', \qquad z = \frac{\gamma'}{n'}(x - \xi') + \zeta',$$

où l'on a posé

$$(11) \qquad \begin{cases} \xi' = M' - n' \dfrac{nh - g(\xi - M)}{nl - k(\xi - M)}, \\ \eta' = \dfrac{n\eta}{nl - k(\xi - M)}, \\ \zeta' = \dfrac{n\zeta}{nl - k(\xi - M)}. \end{cases}$$

ξ', η', ζ' sont les coordonnées d'un point indépendant de la direction du rayon incident, puisque ces coordonnées sont indépendantes de β et de γ. Donc tous les rayons incidents issus du point ξ, η, ζ viennent après avoir traversé le système de surfaces passer par le point ξ', η', ζ'; ce point est dit l'*image* du premier.

L'image et le point lumineux sont dans un plan passant par l'axe et le rapport de leurs distances à l'axe est

$$(12) \qquad \frac{n}{nl - k(\xi - M)},$$

ou, en tenant compte de la première des formules (11)

$$(12\ bis) \qquad g + \frac{k}{n'}(\xi' - M').$$

Chacun de ces points n'est réel que s'il se trouve dans le milieu correspondant, de sorte que les conditions pour la réalité du point et de l'image sont

$$\xi < M, \qquad \xi' > M'.$$

Il y a lieu de remarquer aussi que la valeur de ξ' n'est jamais indéterminée; quand elle est finie, celles de η' et de ζ' le sont aussi.

50. Image d'un objet situé dans un plan perpendiculaire à l'axe. — Tous les points d'un tel objet ayant même abscisse ξ, leurs images auront aussi même abscisse ξ'; pour tous ces points, le rapport (12) est le même; donc l'image est semblable à l'objet, et l'expresion (12) est le rapport de similitude. On l'appelle *grossissement linéaire*.

Si k est nul, ce grossissement est égal à $\frac{1}{l}$ ou à g; il est indépendant de la position de l'objet. Dans les autres hypothèses, il en dépend.

Si l'objet est situé à l'infini, le grossissement linéaire est nul.

51. Points et plans principaux. — Gauss a donné le nom de *plans principaux* à deux plans qui sont toujours rencontrés sur une parallèle à l'axe, le premier par le rayon incident, le second par le rayon émergent.

Soient E et E′ les abscisses des points de ces deux plans. La condition imposée s'obtiendra en écrivant que les équations (8) du rayon émergent donnent pour $x = \mathrm{E}'$ les mêmes valeurs de y et z que les équations (1) pour $x = \mathrm{E}$. On remplace dans les équations (8), β' et b', γ' et c' par leurs valeurs (9) en fonction de b et β, c et γ, et l'on obtient d'une part l'équation

$$\frac{\beta}{n}(\mathrm{E}-\mathrm{M})+b=\frac{kb+l\beta}{n'}(\mathrm{E}'-\mathrm{M}')+gb+h\beta,$$

et d'autre part une équation qui ne diffère de la précédente que par la substitution des lettres c et γ aux lettres b et β. Ces équations devant être satisfaites quels que soient β et b, γ et c, donnent les deux conditions

$$(13)\qquad \begin{cases} \mathrm{E}=\mathrm{M}-\dfrac{n}{k}(1-l), \\ \mathrm{E}'=\mathrm{M}'+\dfrac{n'}{k}(1-g), \end{cases}$$

qui déterminent les deux plans principaux. Ces plans s'éloignent indéfiniment si $k = 0$.

Les points où l'axe rencontre les plans principaux s'appellent *points principaux*.

52. **Foyers et plans focaux.** — Gauss nomme *premier plan focal* un plan tel que tout point lumineux qui s'y trouve donne un faisceau émergent de rayons parallèles, et, par suite, une image à l'infini. En désignant par Φ l'abscisse de ce premier plan focal, on obtient de suite, en annulant le dénominateur de ξ' donné par l'équation (11), la condition

$$\Phi = M + \frac{nl}{k} = E + \frac{n}{k}. \tag{14}$$

Gauss nomme *second plan focal* un plan dans lequel se trouve l'image d'un point lumineux infiniment éloigné.

En faisant ξ infini dans les équations (11), on obtient

$$\Phi' = M' - \frac{n'g}{k} = E' - \frac{n'}{k}, \tag{15}$$

où Φ' désigne l'abscisse du second plan focal.

Les points de ces plans situés sur l'axe s'appellent *foyers*. Le faisceau émergent provenant du premier, et le faisceau incident correspondant au second sont formés de rayons parallèles à l'axe.

53. **Distances focales principales.** — Gauss donne ce nom aux différences $E - \Phi$, $\Phi' - E'$. Ces distances focales sont égales quand $n = n'$, c'est-à-dire quand les milieux extrêmes sont identiques, ce qui a lieu ordinairement dans les instruments d'Optique.

Biot introduit aussi les distances focales. Il les compte des surfaces extrêmes ; il appelle *distance focale principale* la différence $M' - \Phi'$ et la représente par la lettre F, et *distance focale réciproque* la différence $M - \Phi$.

54. **Point oculaire, anneau oculaire.** — Biot nomme *point oculaire* le point où se forme l'image d'un point lumineux situé au sommet de la première surface. Si nous représentons par $M' - H$ l'abscisse de ce point, nous aurons

$$H = n' \frac{h}{l}. \tag{16}$$

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,
QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6e).

Envoi franco dans toute l'Union postale contre mandat-poste ou valeur sur Paris.

HISTOIRE ABRÉGÉE
DE L'ASTRONOMIE,

Par Ernest LEBON,
Agrégé de l'Université,
Professeur de Mathématiques au Lycée Charlemagne.

UN VOLUME PETIT IN-8, CARACTÈRES ELZÉVIRS, AVEC 16 PORTRAITS, ET UNE CARTE CÉLESTE; TITRE EN 2 COULEURS; 1899. 8 FR.

Ouvrage couronné par l'Académie Française.

Ouvrage recommandé, par le Ministère de l'Instruction publique et par la Ville de Paris, pour les Bibliothèques et les Distributions de Prix (en Mathématiques élémentaires et en Rhétorique, en Première et en Seconde modernes, dans l'Enseignement secondaire des filles, dans l'Enseignement primaire supérieur), et honoré de souscriptions du Ministère de l'Instruction publique et de la Ville de Paris.

Extrait des *Nouvelles Annales de Mathématiques* (Mars 1901).

En signalant, l'un des premiers, l'*Histoire abrégée de l'Astronomie*, par M. E. Lebon, dans notre *Bulletin de Sciences mathématiques et physiques élémentaires* (Paris, 15 juillet 1899), nous avons fait remarquer que « ce Livre, écrit dans un style simple, toujours clair, même dans l'exposition des travaux d'Astronomie mathématique, est le résultat de recherches minutieuses faites dans les Ouvrages originaux, qu'il sera lu avec plaisir par tous ceux qui s'intéressent aux progrès des Sciences et sera un très utile complément du Cours de Cosmographie (ou d'Astronomie élémentaire) dans les classes de Rhétorique, de Mathématiques élémentaires, de Seconde et de Première modernes ». Après notre article, plus de trente analyses élogieuses, parues dans les Journaux français et étrangers, ont aussi contribué à faire connaître le consciencieux travail de M. E. Lebon. Aussi pensons-nous qu'au lieu de donner dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* une appréciation personnelle de cette *Histoire*, il sera plus intéressant pour le lecteur et plus avantageux pour le Livre de présenter des extraits des principales analyses parues jusqu'ici.

Puisons d'abord dans deux des articles qui indiquent le plus complètement le plan, le but et l'utilité du Livre de M. E. Lebon :

« Cet ouvrage est construit d'après un plan original qui le distingue des ouvrages précédents sur la matière, publiés en France tout au moins....

» Dans son Livre, M. Ernest Lebon s'est proposé surtout de donner

les biographies des principaux astronomes et géodésiens, depuis l'antiquité jusqu'à nos jours. Les biographies sont assez complètes et énumèrent les principaux détails de leur vie, les circonstances qui les ont engagés dans leurs recherches scientifiques, et enfin un résumé succinct de leurs travaux les plus importants.....

» L'ordre chronologique des naissances règle la succession des biographies. Cependant cet ordre suivi strictement aurait entraîné la confusion surtout pour les astronomes de notre époque, qui en général, dans cette science spéciale qui est l'Astronomie, ont une spécialité, c'est-à-dire une branche particulière à laquelle ils s'adonnent exclusivement. Très sagement l'auteur a divisé son domaine en trois grandes parties : période ancienne, période moderne, période contemporaine, et ensuite chaque période en plusieurs Chapitres qui correspondent aux diverses branches de l'Astronomie, le nombre des Chapitres étant le plus grand dans la période contemporaine. Or l'ordre chronologique des naissances est suivi seulement dans chaque Chapitre. Le lecteur, pour chaque branche de l'Astronomie, peut donc mesurer la part exacte de chaque astronome dans le résultat et en même temps suivre les progrès successifs plus ou moins rapides de cette branche, pendant un long espace de temps. D'ailleurs, au commencement de plusieurs Chapitres, l'auteur ajoute un résumé bref de la question et de ses préliminaires, et prépare le lecteur à la nomenclature des résultats obtenus par les astronomes successifs qui l'ont étudiée.

» Ce livre peut donc, à juste titre, être appelé une Histoire de l'Astronomie. Il est heureusement complété par une Table alphabétique des auteurs cités dans l'Ouvrage, avec l'indication des pages qui les concernent, et avec l'addition de nombreux détails non insérés dans la biographie.

» ... Il fournit des renseignements fort utiles et très commodes à trouver. Il doit être recommandé à tous ceux qui veulent faire un voyage, complet ou restreint, dans le domaine de l'Astronomie. » (H. Deslandres, Astronome titulaire à l'Observatoire physique de Meudon. *Bulletin astronomique,* publié par l'Observatoire de Paris, décembre 1900).

... « La période ancienne se trouve rapidement traitée et l'exposition s'attache davantage à la découverte de la vitesse de la lumière, à la théorie des tourbillons, à la forme de la Terre, à l'attraction universelle, à la Mécanique céleste, à l'Astronomie physique, à la Géodésie et à la Météorologie. Tous les grands problèmes de l'univers sont exposés d'une façon lumineuse, en citant les diverses étapes créées par les différents savants ; ceux qui vivent ont, comme les autres, leur biographie, et l'on peut se renseigner immédiatement dans le livre, bien illustré, et dans des Tables, fort bien faites, sur les préoccupations astronomiques passées, les perfectionnements et les besoins de la Science actuelle. » (Jean Mascart, Aide-Astronome à l'Observatoire de Paris. *Revue encyclopédique,* 1900).

Citons encore quelques lignes tirées d'autres articles écrits dans le même ordre d'idées :

... « Son livre donne l'exposé méthodique, siècle par siècle, génération par génération, des progrès de l'Astronomie depuis sa naissance....

» Il suit ce progrès pas à pas. Il ne peut tout dire dans la forme résumée qu'il a choisie, mais il dit tout l'essentiel. » (E. Durand-Gréville, *Journal de Saint-Pétersbourg,* 12 août 1899).

... « L'ouvrage s'adresse donc aux professeurs et aux élèves des Cours d'Astronomie, et aux personnes qui s'intéressent aux progrès de la plus belle et de la plus attrayante des Sciences.

» ... L'auteur s'attache surtout à la Période moderne, qu'il fait dater de Copernic et qu'il prolonge jusqu'au milieu du XIX^e^ siècle, et à la Période contemporaine. Ces deux parties, qui occupent l'Ouvrage presque tout entier, sont intéressantes et généralement bien renseignées. » (I. T., *Revue bibliographique belge,* Bruxelles, 31 août 1899.)

... « Non seulement les personnes versées dans l'Astronomie devraient accueillir ce livre avec empressement dans leur bibliothèque, mais aussi ceux qui s'intéressent au progrès de cette Science, parcourront ces pages avec profit. » (*Nature,* Londres, 5 octobre 1899.)

« Cet ouvrage est le résumé d'une dizaine d'années de recherches. Il rendra service à tous ceux qui ont à enseigner la Cosmographie ou à perfectionner leurs connaissances astronomiques....

» On ne peut que savoir gré à l'Auteur d'avoir mis entre les mains de tous un livre utile dont la lecture ne présente pas plus de difficultés que celle d'une histoire quelconque. » (*Le Cosmos,* Paris, 14 octobre 1899.)

« En ce livre dégagé de tout calcul et de toutes théories, l'auteur, en un langage accessible à tous, donne un exposé des plus complets des grandes découvertes et des travaux importants accomplis en Astronomie depuis les temps anciens jusqu'à nos jours.

« ... Cette Histoire constitue donc un livre du plus haut intérêt et qui a sa place indiquée dans toutes les bibliothèques. » (Georges Vitoux. *Le Rappel* et *Le XIX^e^ Siècle*, Paris, 26 novembre 1899.)

« L'Astronomie moderne, la Mécanique céleste, la Géodésie et la Météorologie sont traitées abondamment en 200 pages.... L'exposition est précise et intéressante. Des Tables de matières détaillées, faites à divers points de vue, augmentent l'utilité de l'Ouvrage. » (L. *Litterarisches Centralblatt,* n° 31, Leipzig, août 1900.)

Les extraits suivants de trois autres analyses montrent que l'Ouvrage de M. E. Lebon a de solides qualités de style et qu'il est remarquable au point de vue typographique :

« Voici un livre qui n'est pas banal et auquel son intérêt, mis encore en relief par une forme littéraire élégante, vaudra, nous n'en doutons pas, un légitime succès. Il est composé avec compétence. » (R. Guimaraes, Membre de l'Académie Royale des Sciences de Lisbonne. *Enseignement mathématique,* Paris, 15 juillet 1900.)

« D'abord ce livre est beau. Non seulement il ne fatigue pas les yeux, mais encore il les régale, grâce au papier, aux illustrations, aux ornements typographiques distribués avec goût....

» Le Livre de M. E. Lebon, malgré son titre modeste, est aussi un bon livre; il est clair, sobre et précis. C'est le fruit de recherches minutieuses, faites aux sources. » (A. Rebière, Agrégé de Mathématiques. *Revue générale des Sciences pures et appliquées,* Paris, 31 décembre 1899.)

« C'est un excellent petit Ouvrage qui unit à son impression soignée en caractères elzéviriens beaucoup d'attrait et d'intérêt, non seulement pour les personnes qui s'occupent spécialement de la belle Science dont il traite, mais aussi pour beaucoup d'autres, grâce au style agréable et clair avec lequel il est écrit. » (*Memorias y Revista de la Sociedad cientifica* Antonio Alzate; n^os^ 11 et 12, Mexico, 1898-1899.)

On voit donc que cette *Histoire* a été l'objet de bien des appréciations flatteuses et qu'elle a été chaudement recommandée par des astronomes, des professeurs et des publicistes aux jeunes étudiants et aux gens du

monde. Nous ne voudrions pas terminer notre compte rendu sans dire que ce Livre a attiré l'attention de plusieurs corps savants : ainsi, il a été présenté à l'Académie des Sciences de Paris par un de ses membres, M. C. Wolf ; apprécié devant la Société Astronomique de France par son Secrétaire général, M. C. Flammarion; signalé à la Société Royale Astronomique de Londres par son Président, M. G.-H. Darwin.

L. Gérard,
Docteur ès Sciences.

Parmi les autres Revues et Journaux contenant des Analyses et des appréciations favorables à cette *Histoire*, citons : *Bibliothèque universelle* (Genève, 9 août 1899); *Revue de Géographie* (Paris, novembre 1899); *Minerva* (Rome, 14 janvier 1900); *L'Enseignement secondaire* (Paris, 1er mars 1900); *Revue des Études historiques* (Paris, mai 1900); *Der Mechaniker* (Berlin, 5 mai 1900); *L'Humanité nouvelle* (Paris, mai 1900); *Annalen der Physik und Chemie* (Leipzig, 2 septembre 1900); *Astronomischen Jahresbericht* (Berlin, 1900); *Jornal de Sciencias mathematicas e astronomicas* (vol. XIV, n° 1, Coïmbre, 1900); *Bollettino di Bibliografia* (Gino Loria, Gênes, mars, 1901); Le *Journal* (Paris, 3 juillet 1901); *Revue du Touring-Club de France* (Paris, 15 juillet 1901); *Bulletin de la Société astronomique de France* (Paris, août 1901); *Le Matematiche pure ed applicate* (C. Alasia, Citta di Castello, juillet 1901).

Extrait de la Table des Matières.

Période ancienne. Premières observations : Astronomie en Chaldée, en Egypte, en Phénicie, en Grèce. Fondation de l'École d'Alexandrie. Découverte de la précession des équinoxes. Système de Ptolémée. Astronomie chez les Romains et chez les Arabes, en Europe, en Perse et en Chine. — **Période moderne.** Système de Copernic. Système des Tourbillons. Loi de l'Attraction universelle : Découverte de la périodicité des comètes. Figure de la terre. Problème des trois corps. Mécanique céleste : Théorie de la formation de l'Univers, par Laplace; par Kant. Fonction perturbatrice. Théorie de la Lune. Méthodes d'approximation de Cauchy. Perfectionnement de l'Astronomie physique : Découverte d'une planète par W. Herschel. Etoiles doubles. Nébuleuses. Théorie physique du Soleil par W. Herschel. Découverte de planètes entre Mars et Jupiter. Parallaxe d'une étoile. Nébuleuses. Chaleur solaire. Théorie physique du Soleil par J. Herschel. Géodésie. Météorologie. — **Période contemporaine.** Progrès des méthodes de la Mécanique céleste : Découverte d'une planète par Le Verrier. Progrès de l'Astronomie stellaire : Etoiles doubles. Parallaxe d'une étoile. Mouvement propre des étoiles. Nébuleuses. Assimilation des étoiles filantes aux comètes. Expériences. Observations et Hypothèses : Preuves de la rotation diurne de la Terre. Valeur de la vitesse de la lumière. Taches du Soleil. Chaleur solaire. Taches de Mars. Théorie de la formation de l'Univers, par M. H. Faye. Analyse spectrale en Astronomie : Raies du spectre solaire. Analyse spectrale du Soleil. Etude des protubérances et de la couronne. Théorie physique du Soleil par Secchi ; par M. H. Faye. Analyse spectrale des étoiles, des nébuleuses, des comètes. Vitesse radiale des étoiles. Géodésie. Météorologie. La Photographie en Astronomie : Etude photographique des astres. Photographie de la vitesse radiale. Photographie de la chromosphère. Etudes photographiques par M. Janssen. Carte photographique du Ciel. Cartes de la Lune. Découverte de petites planètes et de satellites. Sidérostat a lunette. Mécanique céleste a la fin du XIXe siècle. Théorie et Tables des planètes, de la Lune, des satellites. Anneau de Saturne. Théorie des comètes. Comètes périodiques. Recherches sur la réfraction et l'aberration. Loi d'attraction de Weber. Calculs relatifs au mode de formation de l'Univers, au mouvement du système solaire. Nouvelles méthodes de la Mécanique céleste. Opinion de M. H. Poincaré sur la stabilité du système solaire. — Dictionnaire biographique et bibliographique.

43406 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

Tout point situé dans le plan tangent au sommet de la première surface, ou, ce qui revient au même dans les limites d'approximation que nous avons adoptées, dans cette première surface elle-même, donne une image située dans le plan perpendiculaire à l'axe au point oculaire. Le grossissement linéaire est alors $\frac{1}{l}$.

Il s'ensuit que l'image de la première surface tout entière forme un cercle dont le centre est au point oculaire; ce cercle s'appelle *anneau oculaire;* tous les rayons reçus par la première surface passent par cet anneau oculaire; le rapport du diamètre de ce cercle à celui de la première surface est $\frac{1}{l}$.

55. **Grossissement angulaire.** — Si un rayon incident passe par le sommet de la première surface et a pour équation

$$y = \frac{\beta}{n}(x - \mathrm{M}),$$

le rayon émergent passera par le point oculaire, et l'on aura pour ce rayon

$$\beta' = l\beta.$$

Or $\frac{\beta'}{n'}$ et $\frac{\beta}{n}$ sont les tangentes trigonométriques des angles que ces rayons font avec l'axe ; le rapport de ces tangentes est

$$l\frac{n}{n'}.$$

Biot donne à ce rapport le nom de *grossissement angulaire.*

Il représente la quantité l par N. Dans le cas où les milieux extrêmes sont identiques, c'est le grossissement angulaire lui-même. Il est l'inverse du rapport du diamètre de l'anneau oculaire à celui de la première surface.

56. **Points nodaux.** — M. Listing a donné ce nom à deux points situés sur l'axe, tels que si un rayon incident passe par l'un, le rayon émergent passe par l'autre et soit parallèle au rayon incident.

Si l'on désigne par $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{N}'$ les abscisses de ces deux points, on

a les relations

$$o = \frac{\beta}{n}(\mathfrak{T} - M) + b, \qquad o = \frac{\beta'}{n'}(\mathfrak{T}' - M') + b',$$
$$b' = gb + h\beta, \qquad \beta' = kb + l\beta,$$
$$\frac{\beta'}{n'} = \frac{\beta}{n}.$$

Si l'on élimine b, b', β, β', on obtient, à cause de l'homogénéité, deux équations, qui sont les suivantes :

$$(17) \qquad \mathfrak{T} - M = \frac{ln - n'}{k}, \qquad \mathfrak{T}' - M = \frac{n - gn'}{k}.$$

57. **Relations entre les divers points et plans ci-dessus définis.** — Les points nodaux se confondent avec les points principaux quand les milieux extrêmes sont identiques.

Dans les autres cas, ils sont liés aux points principaux et aux foyers par les relations faciles à établir

$$(18) \qquad \begin{cases} \mathfrak{T}' - \Phi' = -(E - \Phi), \\ \mathfrak{T} - \mathfrak{T}' = E - E', \end{cases}$$

D'autre part, il y a entre les éléments introduits par Gauss et ceux de Biot des relations simples qu'il est nécessaire de connaître pour l'intelligence des travaux de Biot. On a

$$(19) \quad F = M' - \Phi', \qquad H = M' - \Phi' + \frac{(\Phi' - E')(E - \Phi)}{M - \Phi}, \quad N = \frac{M - \Phi}{E - \Phi}.$$

En réunissant ces relations à la suivante, qui a lieu entre les plans principaux et les plans focaux,

$$\frac{E - \Phi}{n} = \frac{\Phi' - E'}{n'},$$

on déduit aisément les éléments de Gauss de ceux de Biot :

$$(20) \qquad \begin{cases} \Phi' = M' - F, & \Phi = M + N^2 \frac{n}{n'}(F - H), \\ E = M - N(I - N)\frac{n}{n'}(F - H), & E' = M' - F + N(F - H), \end{cases}$$

58. **Transformation des équations des rayons incident et émergent.** — Il est utile d'introduire les éléments de Gauss dans les

équations des rayons incident et émergent. Si l'on écrit les équations du rayon incident sous la forme

$$y = \frac{\beta}{n}(x - \mathrm{E}) + \mathrm{B}, \qquad z = \frac{\gamma}{n}(x - \mathrm{E}) + \mathrm{C},$$

on trouve immédiatement

$$\mathrm{B} = b + \beta\frac{l-1}{k}, \qquad \mathrm{C} = c + \gamma\frac{l-1}{k}.$$

En mettant de même les équations du rayon émergent sous la forme

$$y = \frac{\beta'}{n'}(x - \mathrm{E}') + \mathrm{B}', \qquad z = \frac{\gamma'}{n'}(x - \mathrm{E}') + \mathrm{C}',$$

on trouve, en utilisant les équations (9) et (13),

$$(21) \qquad \begin{cases} \beta' = \beta + k\mathrm{B}, & \gamma' = \gamma + k\mathrm{C}, \\ \mathrm{B}' = \mathrm{B}, & \mathrm{C}' = \mathrm{C}. \end{cases}$$

59. **Transformation des équations entre les coordonnées d'un point et celles de son image.** — Les relations (11) s'expriment simplement au moyen des éléments de Gauss et aussi au moyen des éléments de Biot. En introduisant ceux de Gauss, on trouve d'abord

$$(22) \qquad \begin{cases} k = \dfrac{n}{\Phi - \mathrm{E}} = \dfrac{n'}{\mathrm{E}' - \Phi'}, \qquad l = \dfrac{\Phi - \mathrm{M}}{\Phi - \mathrm{E}}, \qquad g = -\dfrac{\Phi' - \mathrm{M}'}{\mathrm{E}' - \Phi'}, \\ h = \dfrac{(\Phi - \mathrm{M})(\Phi' - \mathrm{M}') - (\Phi - \mathrm{E})(\Phi' - \mathrm{E}')}{n(\Phi' - \mathrm{E}')}. \end{cases}$$

On en déduit pour le grossissement linéaire

$$(23) \qquad \frac{n}{nl - k(\xi - \mathrm{M})} = \frac{n}{n + k(\mathrm{E} - \xi)} = \frac{1}{1 + \dfrac{\mathrm{E} - \xi}{\Phi - \mathrm{E}}} = \frac{\Phi - \mathrm{E}}{\Phi - \xi}.$$

La relation entre ξ' et ξ devient, si l'on se borne à y remplacer M et M′ en fonction de E et E′ par les formules (13),

$$(24) \qquad \frac{n}{\mathrm{E} - \xi} + \frac{n'}{\xi' - \mathrm{E}'} = -k.$$

Si l'on y remplace E et E′ en fonction de Φ et Φ', cette relation devient

$$(25) \qquad (\Phi - \xi)(\xi' - \Phi') = \frac{nn'}{k^2} = (\Phi - \mathrm{E})(\mathrm{E}' - \Phi').$$

Il importe de former les équations analogues au moyen des constantes de Biot.

Le grossissement linéaire devient

$$(26) \qquad \frac{N\frac{n}{n'}(F-H)}{M-\xi+N^2\frac{n}{n'}(F-H)}.$$

La relation entre ξ et ξ' devient

$$(27) \qquad \frac{1}{M'-\xi'-H}=\frac{1}{F-H}+\frac{n}{n'}\frac{N^2}{M-\xi}.$$

Pour compléter ces formules et faciliter la lecture de l'Ouvrage de Biot, nous donnerons la signification de certaines lettres employées dans tout le cours de cet Ouvrage.

Biot représente par P la quantité $\frac{n'}{N(F-H)}$, par Q la quantité $\frac{HN}{n'}$, par R la quantité $\frac{PF}{n'}$. Ces quantités satisfont à la relation

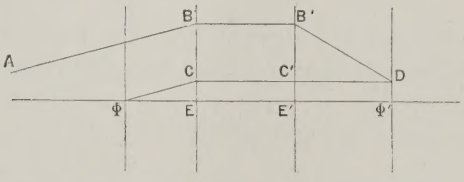
$$RN-PQ=1.$$

Biot représente en outre par Δ la quantité $M-\xi$ et par Δ_f la quantité $M'-\xi'$.

60. **Constructions géométriques.** — La considération des foyers et celle des plans principaux donnent une construction géométrique facile du rayon émergent correspondant à un rayon incident donné et de l'image d'un point.

Soient (*fig.* 2) Φ, Φ', E, E' les foyers et les plans principaux, AB

Fig. 2.

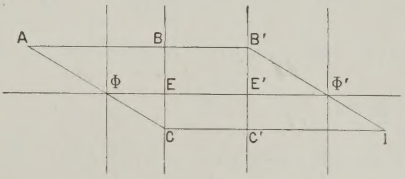


un rayon incident. Menons BB' parallèle à l'axe; le rayon émergent passera en B'. Menons, d'autre part, un rayon ΦC parallèle à AB; il émergera parallèlement à l'axe, et par suite suivant CC'D. Tous

les rayons parallèles à AB viennent après l'émergence concourir en un point situé dans le second plan focal, et par suite au point D. Donc le rayon émergent est B'D.

Si l'on veut construire l'image d'un point, on mènera, parallèlement à l'axe, un rayon incident ABB' (*fig.* 3) qui émergera suivant B'Φ', et par le foyer Φ le rayon AΦC qui émergera suivant CC'I parallèlement à l'axe. Le point I sera l'image du point A.

Fig. 3.



Dans le cas où les milieux extrêmes sont identiques, on remarquera que la droite E'I est parallèle à la droite AE.

Ces constructions sont en défaut si k est nul, puisque les foyers et les plans principaux cessent d'exister. Les formules (9) montrent que dans ce cas les rayons incidents qui ont une même direction donnent des rayons émergents qui ont aussi la propriété d'être parallèles. Le grossissement linéaire est constant et égal à g ou à $\frac{1}{l}$. Gauss introduit dans ce cas la notion de l'anneau oculaire et celle du grossissement angulaire définis comme Biot les définit dans le cas général.

61. Plan de Bravais. — On peut utiliser dans ce cas un plan dont la considération a été introduite par Bravais, et étendue au cas général par M. Martin. Le plan de Bravais est un plan perpendiculaire à l'axe, tel que tout point lumineux situé dans ce plan ait son image dans le même plan.

Il s'agit donc d'écrire que dans la première relation (11), ou dans les relations (24), (25), (27), on a

$$\xi' = \xi.$$

On obtient, dans le cas général, une équation du second degré, dont les racines peuvent être réelles ou imaginaires; mais, si k est

nul, l'équation n'est plus que du premier degré; en remplaçant ξ par B, elle s'écrit

$$B - M = \frac{nl(M' - M) - nn'h}{nl - n'g}, \tag{28}$$

ou, avec les éléments de Biot, F devenant infini,

$$B - M = \frac{nN^2(M' - M - H)}{nN^2 - n'}.$$

La première équation (11) peut s'écrire

$$nl(\xi' - M') + n'nh - n'g(\xi - M) =$$

Ayant, d'autre part,

$$nl(B - M') + n'nh - n'g(B - M) = 0,$$

on en déduit

$$nl(\xi' - B) - n'g(\xi - B) = 0. \tag{29}$$

Les nombres g et l sont de même signe, puisque leur produit est 1. Il s'ensuit que l'image et le point lumineux sont d'un même côté du plan de Bravais, et que le rapport de leurs distances à ce plan est $\frac{n'}{n}\frac{g}{l} = \frac{n'}{n}\frac{1}{l^2}$. Quand les milieux extrêmes sont identiques, ce rapport est $\frac{1}{l^2}$: c'est le carré du grossissement linéaire ou l'inverse du carré du grossissement angulaire.

62. **Cas d'une lentille. — Formules générales.** — Une lentille est une masse de verre limitée par deux calottes sphériques. La distance des sommets des deux surfaces est généralement petite par rapport au diamètre des cercles qui limitent les deux faces. Ordinairement ces faces ne se prolongent pas jusqu'à leur intersection mutuelle, mais la masse de verre est limitée par un cylindre ayant pour base les cercles égaux qui limitent ces deux calottes sphériques.

Nous supposons que la lentille est plongée tout entière dans un même milieu, de sorte que $n = n'$. Nous ferons ces deux nombres égaux à l'unité. Le nombre intermédiaire n_1 sera alors l'indice du verre par rapport au milieu dans lequel la lentille est plongée.

Nous poserons

$$(30)\quad \begin{cases} O - M = R, & O' - M' = R', & M' - M = e, \\ u = \dfrac{1 - n_1}{R}, & u_1 = \dfrac{n_1 - 1}{R'}, & t_1 = \dfrac{M' - M}{n_1}, \end{cases}$$

La fraction continue

$$u + \cfrac{1}{t_1 + \cfrac{1}{u_1}}$$

a pour dernière réduite

$$\frac{uu_1t_1 + u + u_1}{u_1t_1 + 1}.$$

L'avant-dernière est

$$\frac{ut_1 + 1}{t_1}.$$

Nous aurons donc (§ 48*b*)

$$(31)\quad \begin{cases} g = ut_1 + 1 = 1 - \dfrac{n_1 - 1}{R}\dfrac{e}{n_1}, \\ h = t_1 = \dfrac{e}{n_1}, \\ k = uu_1t_1 + u + u_1 = (n_1 - 1)\left(\dfrac{1}{R'} - \dfrac{1}{R}\right) - \dfrac{(n_1 - 1)^2}{RR'}\dfrac{e}{n_1}, \\ l = u_1t_1 + 1 = 1 + \dfrac{(n_1 - 1)}{R'}\dfrac{e}{n_1}. \end{cases}$$

Il en résulte pour la distance focale (suivant Gauss) la valeur

$$(32)\quad E - \Phi = \Phi' - E' = \frac{1}{(n_1 - 1)\left(\dfrac{1}{R} - \dfrac{1}{R'}\right) + \dfrac{(n_1 - 1)^2}{RR'}\dfrac{e}{n_1}},$$

et pour les plans principaux les abscisses suivantes :

$$(33)\quad E - M = -\frac{(n_1 - 1)}{R'}\frac{e}{n_1}(E - \Phi), \qquad E' - M' = -\frac{(n_1 - 1)}{R}\frac{e}{n_1}(E - \Phi).$$

On voit que, sauf un cas où R′ est de même signe que R et en diffère très peu, et de façon que $\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}$ soit négatif, la distance focale est finie et les plans principaux sont voisins de la lentille.

Dans l'ancienne théorie, dite *élémentaire,* on négligeait *e* : alors les points principaux se confondaient en un point que l'on nommait *centre optique*. On voit que, dans le cas d'exception que nous venons de signaler, les deux termes du dénominateur de la

distance focale étant très voisins, et de signes contraires, la théorie élémentaire qui néglige le second et conserve le premier serait tout à fait inexacte.

Formons aussi les éléments de Biot

$$F = M' - \Phi' = -\frac{1 - \frac{n_1 - 1}{R}\frac{e}{n_1}}{(n_1 - 1)\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right) + \frac{(n_1 - 1)^2}{RR'}\frac{e}{n_1}},$$

$$H = \frac{\frac{e}{n_1}}{1 + \frac{n_1 - 1}{R'}\frac{e}{n_1}}, \qquad N = 1 + \frac{n_1 - 1}{R'}\frac{e}{n_1}.$$

On voit que l'anneau oculaire est très voisin de la lentille et précède la seconde face; le grossissement angulaire est voisin de l'unité.

Donnons encore le grossissement linéaire et l'abscisse de l'image.

Le grossissement linéaire est

$$(34) \qquad \frac{1}{1 + \frac{n_1 - 1}{R'}\frac{e}{n_1} - (\xi - M)\left[(n_1 - 1)\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}\right) - \frac{(n_1 - 1)^2}{RR'}\frac{e}{n_1}\right]},$$

et l'abscisse de l'image est

$$(35) \qquad \xi' = M' - \frac{\frac{e}{n_1} - \left(1 - \frac{n_1 - 1}{R}\frac{e}{n_1}\right)(\xi - M)}{1 + \frac{n_1 - 1}{R'}\frac{e}{n_1} - \left[(n_1 - 1)\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}\right) - \frac{(n_1 - 1)^2}{RR'}\frac{e}{n_1}\right](\xi - M)}.$$

On voit que, dans l'hypothèse où k est nul ou très petit, le grossissement linéaire est très voisin de l'unité et $\xi' - M'$ de $\xi - M$. L'effet de la lentille est insensible. Nous ne nous occuperons pas davantage de ce cas, du moins pour une seule lentille.

Revenant au cas général, nous déduirons encore des abscisses des plans principaux la formule approchée

$$E' - E = (n_1 - 1)e\left(1 - \frac{e}{R' - R}\right),$$

qui montre que le premier plan principal précède toujours le second.

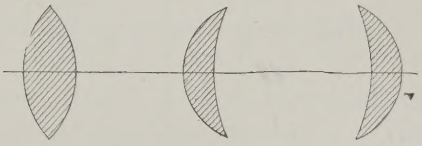
63. **Discussion des propriétés des lentilles.** — La distance focale a le même signe que

$$\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}.$$

Quand elle est positive, la lentille est dite *convergente, divergente* dans le cas contraire.

La *fig.* 4 représente les coupes de trois types de lentilles con-

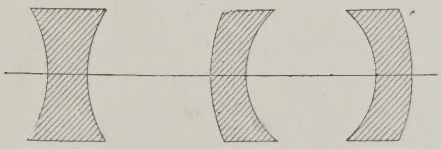
Fig. 4.



vergentes; elles correspondent aux cas suivants : 1° R positif et R′ négatif; 2° R et R′ positifs et $> R$; 3° R et R′ négatifs et $R' < R$ en valeur absolue.

La *fig.* 5 représente les coupes de trois types de lentilles diver-

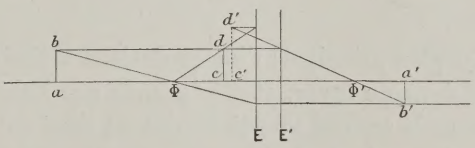
Fig. 5.



gentes; elles correspondent aux cas suivants : 1° R négatif et R′ positif; 2° R et R′ positifs et $R' < R$; 3° R et R′ négatifs et $R' > R$ en valeur absolue.

Dans les lentilles convergentes, le premier foyer précède la lentille et le second la suit (*fig.* 6).

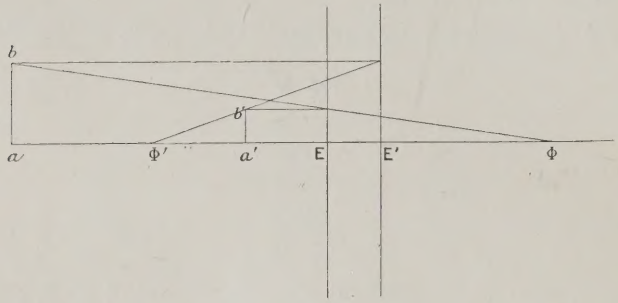
Fig. 6.



Dans les lentilles divergentes, l'inverse a lieu (*fig.* 7).

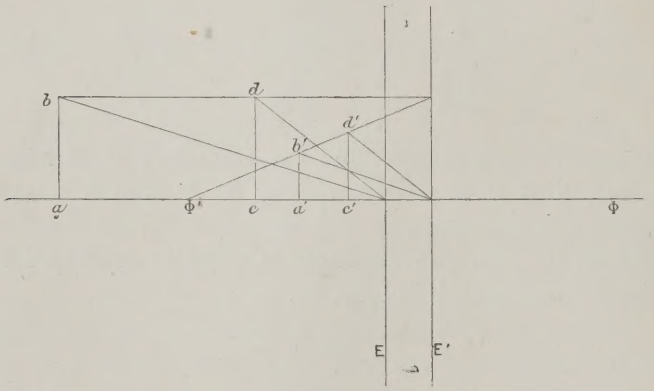
Une lentille convergente donne, d'après la *fig.* 6, pour un objet *ab* placé en avant du foyer Φ, une image réelle et renversée $a'b'$ au delà de Φ′, et un objet *cd* placé entre le foyer Φ et la lentille donne une image $c'd'$ droite et virtuelle.

Fig. 7.



Le grossissement linéaire [formule (23)] étant $\frac{E-\Phi}{\xi-\Phi}$, on voit que dans le premier cas l'image renversée est égale à l'objet si $\Phi = \frac{E+\xi}{2}$; c'est-à-dire, si le foyer est à égale distance de l'objet

Fig. 8.



et du premier plan principal; l'image devient moindre que l'objet si l'objet s'éloigne du foyer, et plus grande que l'objet dans le cas contraire. Dans le second cas, où l'objet est situé entre le foyer et le premier plan principal, l'image virtuelle est toujours plus grande que l'objet.

Une lentille divergente donnera toujours pour un objet situé en avant de la lentille une image virtuelle moindre que l'objet.

Dans la *fig.* 8 nous avons appliqué une construction fondée sur la propriété des points nodaux qui se confondent ici avec les points principaux. Les résultats que nous venons d'énoncer se déduisent aussi immédiatement, en ce qui concerne la position de l'image, de la relation

$$(\Phi - \xi)(\xi' - \Phi') = (\Phi - E)^2.$$

64. **Systèmes convergents, systèmes divergents.** — Si dans un système optique la constante k est négative, les distances focales $E - \Phi$, $\Phi' - E'$ sont positives. D'après la construction de Gauss, les rayons lumineux incidents parallèles à l'axe s'infléchissent au point où ils rencontrent le second plan principal et continuent leur marche en se rapprochant de l'axe. Pour ce motif, un tel système est dit *convergent*.

Si, au contraire, la constante k est positive et, par suite, les distances focales négatives, les rayons incidents parallèles à l'axe, après avoir rencontré le second plan principal, s'éloignent de l'axe; le système est dit *divergent*.

Il faut bien remarquer que le second plan principal n'est pas nécessairement situé après le premier. Cette circonstance s'est produite dans le cas d'une lentille, mais elle peut ne pas se présenter dans un système quelconque.

65. **Combinaison de plusieurs systèmes optiques ayant même axe.** — Un système optique, d'après la théorie générale, est défini par ses plans principaux et ses plans focaux, et les nombres n, n' qui correspondent aux milieux extrêmes, nombres dont l'un est arbitraire, et qui n'entrent, en définitive, dans les formules que par leur rapport. Soient E_1, E'_1, Φ_1, Φ'_1 les abscisses des plans principaux et des plans focaux d'un premier système optique; n_1, n_2 les valeurs correspondantes de n, n', et k_1 la valeur de la constante k, de sorte que

$$\frac{1}{k} = \frac{\Phi_1 - E_1}{n_1} = \frac{E'_1 - \Phi'_1}{n_2}.$$

Si les équations d'un rayon incident sur ce premier système

sont

$$(36) \qquad y = \frac{\beta_1}{n_1}(x - E_1) + B_1, \qquad z = \frac{\gamma_1}{n_1}(x - E_1) + C_1,$$

celles du rayon émergent sont

$$(37) \qquad y = \frac{\beta_2}{n_2}(x - E'_1) + B_1, \qquad z = \frac{\gamma_2}{n_2}(x - E'_1) + C_1,$$

où

$$(38) \qquad \beta_2 = \beta_1 + k_1 B_1, \qquad \gamma_2 = \gamma_1 + k_1 C_1.$$

Supposons que ce rayon tombe sur un second système dont les éléments constituants seront représentés par E_2, E'_2, Φ_2, Φ'_2, n_2, n_3, k_2. Nous écrirons d'abord ainsi les équations (37)

$$(39) \qquad y = \frac{\beta_2}{n_2}(x - E_2) + B_2, \qquad z = \frac{\gamma_2}{n_2}(x - E_2) + C_2,$$

en faisant

$$(40) \qquad B_2 = B_1 + \frac{\beta_2}{n_2}(E_2 - E'_1), \qquad C_2 = C_1 + \frac{\gamma_2}{n_2}(E_2 - E'_1),$$

et le rayon émergent de ce deuxième système aura pour équations

$$(41) \qquad y = \frac{\beta_3}{n_3}(x - E'_2) + B_2, \qquad z = \frac{\gamma_3}{n_3}(x - E'_2) + C_2,$$

où

$$(42) \qquad \beta_3 = \beta_2 + k_2 B_2, \qquad \gamma_3 = \gamma_2 + k_2 C_2.$$

Nous le regarderons comme incident sur un troisième système, dont les éléments constituants seront E_3, E'_3, Φ_3, Φ'_3, n_3, n_4, k_3, ... et ainsi de suite jusqu'à un $\mu^{\text{ième}}$ système, d'où émergera le rayon final ayant pour équations

$$(43) \qquad y = \frac{\beta_{\mu+1}}{n_{\mu+1}}(x - E'_\mu) + B_\mu, \qquad z = \frac{\gamma_{\mu+1}}{n_{\mu+1}}(x - E'_\mu) + C_\mu.$$

Si l'on pose

$$t_{k-1} = \frac{E_k - E'_{k-1}}{n_k},$$

on a successivement

$$(44)\qquad \begin{cases} \beta_2 = \beta_1 + k_1 B_1, \\ B_2 = B_1 + t_1 \beta_2, \\ \beta_3 = \beta_2 + k_2 B_2, \\ B_3 = B_2 + t_2 \beta_3, \\ \dots\dots\dots\dots, \\ \beta_{\mu+1} = \beta_\mu + k_\mu B_\mu, \end{cases}$$

et des formules toutes semblables détermineront les quantités γ_i et C_i.

Si, dans la deuxième de ces formules, on remplace β_2 par la valeur que donne la première, B_2 sera une combinaison linéaire homogène de β_1 et B_1. Il en sera de même, par des substitutions successives de β_3, B_3, ..., $\beta_{\mu+1}$. Dans l'expression de β_2, les coefficients de B_1 et β_1 sont respectivement le numérateur et le dénominateur de la fraction $\frac{k_1}{1}$. Dans l'expression de B_2 ce sont le numérateur et le dénominateur de la fraction $\frac{k_1 t_1 + 1}{t}$. Dans l'expression de B_3, on les obtiendra en multipliant ceux de B_2 par k_2, et ajoutant ceux de β_2, et ainsi de suite; de sorte que les coefficients de B_1 et β_1, dans les expressions de β_2, B_2, β_3, ..., $\beta_{\mu+1}$, sont respectivement les numérateurs et les dénominateurs des réduites successives de la fraction continue

$$k_1 + \cfrac{1}{t_1 + \cfrac{1}{k_2 + \ddots + \cfrac{1}{k_\mu}}}.$$

Si l'on représente par $\frac{G}{H}$ et $\frac{K}{L}$ l'avant-dernière et la dernière de ces réduites, on a

$$(45)\qquad \begin{cases} B_\mu = GB_1 + H\beta_1, & C_\mu = GC_1 + H\gamma_1; \\ \beta_{\mu+1} = KB_1 + L\beta_1, & \gamma_{\mu+1} = KC_1 + L\gamma_1. \end{cases}$$

Le nombre des réduites étant impair, on aura, d'après la théorie générale des fractions continues,

$$GL - KH = 1.$$

L'identité de forme de ces équations et des équations (39) et (41)

avec celles du § 48 dispense de reprendre les calculs relatifs à la détermination des plans principaux, des plans focaux et de l'image d'un point. On a manifestement

$$(46)\qquad \begin{cases} E = E_1 - \dfrac{n_1}{K}(1 - L), & E' = E'_\mu + \dfrac{n_{\mu+1}}{K}(1 - G); \\ \Phi = E_1 + \dfrac{n_1 L}{K}, & \Phi' = E'_\mu - \dfrac{n_{\mu+1} G}{K}. \end{cases}$$

Les distances focales sont

$$(47)\qquad E - \Phi = -\frac{n_1}{K}, \qquad \Phi' - E' = -\frac{n_{\mu+1}}{K},$$

et la relation entre l'abscisse d'un point et celle de son image

$$(48)\qquad \begin{cases} \dfrac{n_1}{E - \xi} + \dfrac{n_{\mu+1}}{\xi' - E'} = -K \\ \text{ou aussi} \\ (\Phi - \xi)(\xi' - \Phi') = \dfrac{n n_{\mu+1}}{K^2} \end{cases}$$

Dans le cas où les milieux extrêmes sont identiques, on peut faire $n_1 = n_{\mu+1} = 1$; les deux distances focales sont égales.

Si la même condition est remplie pour chacun des systèmes optiques partiels, tous les nombres $n_1, n_2, \ldots, n_{\mu+1}$ sont égaux, et on peut les faire égaux à l'unité. Dans ce cas, chaque système est défini par ses plans principaux et sa distance focale, laquelle, d'après Gauss, est $E - \Phi$ ou $-\frac{1}{K}$.

66. **Cas de plusieurs lentilles.** — Les formules s'appliqueront alors d'elles-mêmes à la combinaison de plusieurs lentilles, sans qu'il y ait aucune explication nouvelle à donner. On introduira, dans les calculs, les abscisses des plans principaux et la distance focale de chaque lentille.

67. **Cas de deux systèmes optiques ayant même axe.** — Si nous limitons à deux le nombre des systèmes considérés au § 65, et si nous supposons identiques les milieux extrêmes et celui qui sépare

les deux systèmes, nous devons poser

$$(49) \qquad t_1 = E_2 - E'_1, \qquad k_1 = -\frac{1}{\varphi_1}, \qquad k_2 = -\frac{1}{\varphi_2},$$

et former les réduites de la fraction continue

$$k_1 + \cfrac{1}{t_1 + \cfrac{1}{k_2}}.$$

Les deux dernières sont

$$\frac{k_1 t_1 + 1}{t_1}, \quad \frac{k_1 k_2 t_1 + k_1 + k_2}{k_2 t_1 + 1}.$$

Nous aurons donc

$$(50) \qquad \begin{cases} G = 1 - \dfrac{t_1}{\varphi_1}, \\ H = t_1, \\ K = -\dfrac{1}{\varphi_1} - \dfrac{1}{\varphi_2} + \dfrac{t_1}{\varphi_1 \varphi_2}, \\ L = 1 - \dfrac{t_1}{\varphi_2}. \end{cases}$$

La distance focale φ du système complexe est donnée par

$$(51) \qquad \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\varphi_1} + \frac{1}{\varphi_2} - \frac{t_1}{\varphi_1 \varphi_2};$$

les plans principaux par

$$(52) \qquad E - E_1 = \frac{\varphi}{\varphi_2} t_1,$$

$$(53) \qquad E' - E'_2 = -\frac{\varphi t_1}{\varphi_1}.$$

68. **Cas de deux lentilles infiniment minces en contact. Lentille équivalente.** — Pour appliquer ces formules à un système de deux lentilles infiniment minces et en contact, il suffit de faire $t_1 = 0$, $E'_2 = E_1$. On voit alors que le système est équivalent à une lentille unique infiniment mince occupant la même position que les lentilles données et dont la distance focale serait donnée par la formule

$$(54) \qquad \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\varphi_1} + \frac{1}{\varphi_2}.$$

Ce résultat s'étend de lui-même à un nombre quelconque de lentilles infiniment minces en contact.

69. **Détermination des éléments d'un système optique.** — En se reportant au n° 67, on voit que, si le système optique (1) est divergent, c'est-à-dire si la distance focale φ_1 est négative, on peut toujours lui associer un système convergent (2), tel que le système complexe soit convergent. Il suffit, en effet, de prendre pour t_1 une longueur positive quelconque et de satisfaire à l'inégalité

$$\frac{1}{\varphi_2}\left(1-\frac{t_1}{\varphi_1}\right)+\frac{1}{\varphi_1}>0.$$

Comme $\frac{1}{\varphi_1}$ est négatif, ainsi que $\frac{t_1}{\varphi_1}$, on voit qu'il suffit de donner à $\frac{1}{\varphi_2}$ une valeur positive assez grande, ou à φ_2 une valeur positive assez petite.

Si l'on connaît les éléments du système convergent (2) et ceux du système composé de (1) et (2), on en déduira manifestement les éléments du système (1).

L'équation (53) donnera $\frac{t_1}{\varphi_1}$, puis l'équation (51) donnera $\frac{1}{\varphi_1}$, d'où t_1, et l'équation (52) donnera E_1.

D'après cela, la détermination des éléments d'un système optique peut toujours se ramener à celle des éléments d'un système convergent.

On obtient une solution simple (¹) en déterminant d'abord les foyers, et l'on y parvient en recevant sur le système un faisceau de rayons parallèles à l'axe. On détermine ensuite la distance focale au moyen de la formule (25) en mesurant les distances aux plans focaux d'un point lumineux et de son image.

(¹) JAMIN et BOUTY, *Cours de Physique*, t. III, fasc. 2, p. 124*.

CHAPITRE IV.

DISPERSION. — ACHROMATISME.

70. Relation entre l'indice de réfraction et la vitesse de propagation du rayon lumineux. — On sait que le passage d'un rayon de lumière solaire d'un milieu dans un autre a pour effet, non seulement d'en changer la direction, mais aussi de le décomposer en rayons inégalement réfrangibles; on admet que tous les rayons lumineux se propagent dans le vide avec la même vitesse, mais qu'ils diffèrent les uns des autres par la durée de la période du mouvement vibratoire qui les constitue, de sorte que, même dans le vide, la longueur d'onde, c'est-à-dire le chemin parcouru par la lumière pendant l'une de ces périodes, varie d'un rayon à l'autre. Quand un rayon passe d'un milieu dans un autre, la période du mouvement vibratoire de chacun d'eux se conserve; la vitesse de propagation de chacun d'eux change aussi, et l'indice de réfraction est le rapport de la vitesse de propagation dans le premier milieu à la vitesse de propagation dans le second. C'est aussi le rapport des longueurs d'onde. La couleur est la manifestation physiologique de la vitesse, ou de la longueur d'onde dans l'œil; elle ne dépend que de la longueur d'onde dans le vide et est indépendante des milieux successifs que le rayon a pu traverser.

71. Production d'un spectre pur. — Quand on reçoit sur un prisme un faisceau lumineux provenant d'une source de quelque étendue, chaque faisceau infiniment mince provenant d'un élément de la source lumineuse est décomposé et donne un spectre; mais les spectres provenant d'éléments voisins se superposent en partie. Il faut prendre, pour obtenir un spectre pur, des précautions particulières dont l'application conduit à la construction ordinaire du spectroscope.

Un faisceau de lumière solaire reçu par une lentille produit dans le plan focal de cette lentille une image du Soleil. Dans ce plan

focal on place une fente étroite qui laisse passer un faisceau très mince que l'on reçoit sur un prisme dont l'arête est parallèle à la fente. Le faisceau très mince est étalé en un spectre virtuel; on le reçoit sur l'objectif d'une lentille astronomique, de façon à en obtenir une image réelle que l'on regarde au moyen d'une loupe.

72. Diverses sortes de spectres. — Le Soleil et les étoiles fixes donnent des spectres où les couleurs varient, au premier aspect, d'une manière continue, mais sont interrompues par un grand nombre de lignes sombres.

Les solides et les liquides incandescents donnent des spectres continus où les couleurs vont de l'extrême rouge à une limite qui dépend de la température. Le rouge commence vers la température de 525° C., et à 1165° C. le spectre renferme toutes les couleurs visibles.

Les flammes purement gazeuses donnent des spectres formés d'un nombre limité de lignes brillantes.

Les nébuleuses donnent soit un spectre de lignes brillantes, et alors elles sont irrésolubles au télescope, soit un spectre continu. Toutes les nébuleuses résolubles donnent un spectre continu.

Les noyaux des comètes donnent des spectres de lignes brillantes.

Les queues des comètes, les planètes, la lumière zodiacale donnent un spectre continu avec des raies sombres. Leur lumière n'est que de la lumière solaire réfléchie (1).

73. Pouvoir dispersif. — Quand on compare les indices de réfraction d'un même milieu pour divers rayons à ceux d'un autre milieu, on trouve que leurs variations ne sont pas proportionnelles.

Les indices d'un même milieu, pour des rayons de longueurs d'onde différentes, sont des fonctions inconnues et complexes de ces longueurs d'onde.

On appelle *pouvoir dispersif* le rapport $\frac{n_2 - n_1}{n - 1}$, où n désigne l'indice d'un rayon moyen, n_1 celui de l'extrême rouge, n_2 celui de

(1) Pour une étude complète de cette question, nous renverrons le lecteur à l'importante étude des radiations qui forme la troisième Partie du 3e fascicule du tome III du *Cours de Physique* de MM. Jamin et Bouty.

l'extrême violet. Ce rapport varie d'un milieu à un autre. Mais, plus généralement, si l'on désigne par δn l'écart entre l'indice d'un rayon de longueur d'onde donnée et l'indice d'un rayon moyen, les valeurs du rapport $\frac{\delta n}{n-1}$ dans deux milieux différents ne sont pas proportionnelles. On peut, avec une exactitude suffisante, admettre la relation

$$\frac{\delta n'}{n'-1} = \alpha \frac{\delta n}{n-1} + \beta \left(\frac{\delta n}{n-1}\right)^2, \tag{1}$$

α et β étant des nombres constants pour ces deux milieux.

Il importe de se rendre compte de l'exactitude avec laquelle cette relation est vérifiée.

Fraunhofer a mesuré, pour les raies qu'il appelle B, C, D, E, F, G, H, les indices de deux verres qu'il appelle *crown* 9 et *flint* 13 : il a trouvé les valeurs

	Crown 9.	Flint 13.
B	1,525832	1,627749
C	1,526849	1,629681
D	1,529587	1,635036
E	1,533005	1,642024
F	1,536052	1,648260
G	1,541657	1,660285
H	1,546566	1,671062

Si l'on prend pour indice moyen celui de la raie F et que l'on désigne par n l'indice du crown 9, par n' celui du flint 13, on a, pour déterminer α et β, six équations dont la résolution par la méthode des moindres carrés donne

$$\alpha = 1,72774, \qquad \beta = 3,458.$$

Les valeurs observées de $\frac{\delta n'}{n'-1}$ sont

$-0,031640$, $-0,028660$, $-0,020399$, $-0,009619$, $0,018549$, $0,035174$.

Les valeurs de la même quantité, calculées par la relation (1), sont

$-0,031683$, $-0,028643$, $-0,020334$, $-0,009695$, $0,018443$, $0,035217$.

Les résidus exprimés en unités du sixième ordre décimal

$$+43, \quad -17, \quad -65, \quad +76, \quad +106, \quad -43$$

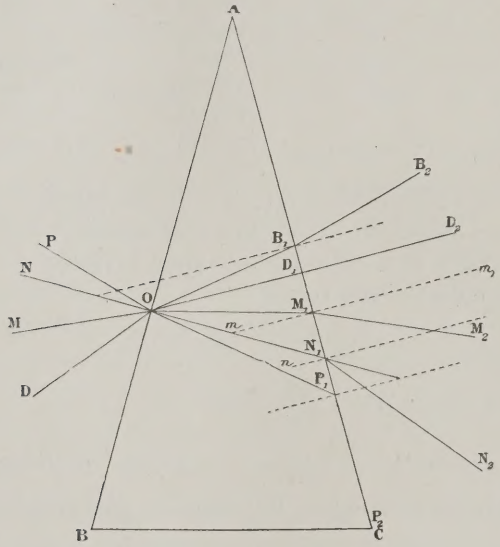
sont de l'ordre des erreurs que comportent les mesures d'indices.

Les termes du second ordre, loin d'être négligeables, influent sur la troisième décimale de $\frac{\delta n'}{n'-1}$.

74. Marche d'un rayon à travers un prisme dans une section principale. Représentation algébrique des angles d'incidence et de réfraction. — On appelle *prisme,* en Optique, un milieu terminé par deux plans et limité à l'intersection de ces deux plans, dite *arête du prisme*. L'angle dièdre fourni par ces plans s'appelle *angle du prisme,* la section droite *section principale*. A l'ordinaire le prisme est limité par une troisième face parallèle à l'arête, également inclinée sur les deux premières et dite *base du prisme,* et par deux sections principales.

Nous étudierons dans le Chapitre suivant la marche à travers le prisme d'un faisceau lumineux très mince et très voisin d'une section principale. Nous nous bornerons ici au cas d'un rayon incident situé dans une section principale ABC (*fig.* 9).

Fig. 9.



Soient

O le point d'incidence;
MO un rayon incident;
OM_1 le rayon réfracté dans le prisme;
M_1M_2 le rayon émergent.

Soient NON_1 la normale en O à la face AB; mM_1m_1 la normale en M_1 à la face AC. Nous représenterons par des nombres positifs ou négatifs i, r, r', i' les angles successifs d'incidence et de réfraction MON, M_1ON_1, mM_1O, $m_1M_1M_2$.

Les nombres i, i' seront positifs si les rayons MO, M_1M_2 sont séparés du sommet A par les normales ON, M_1m_1, négatifs dans le cas contraire; r a le signe de i, r' celui de i'.

75. Relation entre les angles r, r', A. — Si A désigne l'angle du prisme, on a toujours la relation

$$r + r' = A. \tag{2}$$

Cette relation s'obtient en écrivant que la somme des angles du triangle OM_1m est égale à deux angles droits. On vérifie aisément sur une figure qu'elle a lieu pour toutes les valeurs positives ou négatives de l'angle r.

76. Limites imposées à l'angle d'incidence suivant la valeur de l'angle du prisme. — Dans la *fig.* 9, on a représenté la marche des rayons qui offrent quelque particularité remarquable.

BOB_1B_2 représente la marche d'un rayon arrivant en O sous l'incidence rasante. L'angle B_1ON_1 s'appelle *angle limite*. C'est la plus grande valeur L de l'angle de réfraction quand le rayon passe de l'air dans le prisme, et l'on sait qu'un rayon ne peut passer du prisme dans l'air s'il tombe sur la face du prisme en faisant avec la normale un angle plus grand que L. Le rayon est alors totalement réfléchi. Le rayon OB_1 pourrait ne pas rencontrer AC si l'angle A était plus grand que $90° + L$. Un tel prisme ne pourrait être d'aucune utilité.

DOD_1D_2 correspond à un rayon incident DO, tel que le rayon réfracté OD_1 soit normal à la face AC. Le rayon émergent D_1D_2 est le prolongement de OD_1. L'angle D_1ON_1 est égal à l'angle A, et le rayon DOD_1D_2 n'est possible que si l'angle limite L est plus grand que l'angle A. On l'a supposé dans la figure.

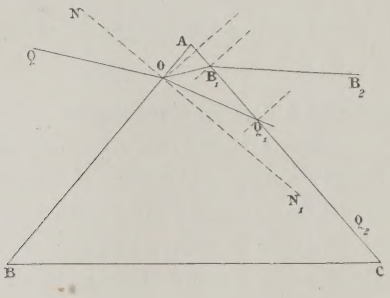
NON_1N_2 est un rayon incident en O normalement à la face AB. Ce rayon n'existe que si l'angle A est aigu. L'angle ON_1n est égal à A.

POP_1P_2 est un rayon tel, que l'angle d'incidence en P_1 soit égal à L. L'angle d'émergence est droit; le rayon émerge suivant P_1P_2C.

Nous supposerons, pour éviter des discussions peu utiles, l'angle A aigu. Deux cas sont alors à distinguer. Dans le cas où A est moindre que l'angle limite, tous les rayons indiqués sont possibles et se succèdent dans l'ordre qu'ils ont sur la *fig.* 9. L'angle i décroît depuis $+ 90^\circ$ jusqu'à — NOP, NOP étant tel que pour cet angle d'incidence l'angle r' soit égal à L.

Si A surpasse l'angle limite, le rayon DOD_2 n'existe pas; le rayon NON_1N_2 n'existe pas davantage; l'angle d'incidence varie depuis $+ 90^\circ$ jusqu'à un angle positif QON tel que r' soit égal à l'angle limite. Dans ce cas, i, r, r', i' sont toujours positifs. On a représenté ce cas dans la *fig.* 10.

Fig. 10.



77. **Valeur de la déviation. Elle a toujours lieu vers la base du prisme.** — On appelle *déviation* l'angle formé par le rayon incident avec le rayon émergent.

Dans la réfraction par une seule surface, si l'indice est plus grand que un, la déviation augmente avec l'angle d'incidence.

En effet, de la relation

$$\sin i = n \sin r$$

on déduit

$$di = n \frac{\cos r}{\cos i} dr, \tag{3}$$

de sorte que $d(i - r)$ est positive, puisque les facteurs n et $\frac{\cos r}{\cos i}$ sont plus grands que l'unité.

Dans un prisme la déviation a lieu vers la base du prisme. Pour s'en assurer, il suffit de comparer le rayon incident I et le rayon émergent E au rayon R réfracté dans la masse du prisme.

Si le rayon incident est compris entre DO et NO, I et E sont tous deux du même côté de R, vers la base du prisme; la proposition est donc vérifiée. Si I est compris entre BO et DO, I est par rapport à R du côté de la base du prisme, et E du côté du sommet; mais, r étant plus grand que la valeur absolue de r', la déviation de I est plus grande que celle de E. Le contraire a lieu si I est compris entre NO et PO. Dans les deux positions la déviation totale a bien lieu vers la base du prisme.

On voit de suite que cette déviation D a pour valeur

$$D = i + i' - A. \tag{4}$$

78. Déviation minimum. — On voit, comme il suit, que la déviation a la plus petite valeur possible quand l'angle d'incidence égale l'angle d'émergence.

En additionnant membre à membre les relations

$$\sin i = n \sin r, \qquad \sin i' = n \sin r', \tag{5}$$

on obtient, en tenant compte de la relation (2),

$$\sin \frac{D + A}{2} = n \sin \frac{A}{2} \frac{\cos \dfrac{r - r'}{2}}{\cos \dfrac{i - i'}{2}}. \tag{6}$$

Toutes les fois que i est différent de i', le dernier facteur du second membre est plus grand que un. Cela est évident quand i et i' sont de signes contraires, puisque r et r' sont aussi de signes contraires et sont, en valeur absolue, moindres que i et i'. Dans les autres cas, i et i' sont positifs.

Si i est plus grand que i', on a, puisque la déviation par une surface augmente avec l'angle d'incidence,

$$i - i' > r - r',$$

d'où

$$i - r > i' - r'.$$

Si i est moindre que i', r est moindre que r', et l'on a

$$i' - r' > i - r,$$

d'où

$$i' - i > r' - r.$$

Dans les deux cas $\cos\frac{i-i'}{2}$ est moindre que $\cos\frac{r-r'}{2}$. La déviation D est donc minimum quand $i = i'$.

79. Variation de la déviation. — Il est au reste aisé d'étudier comment la déviation varie quand l'angle d'incidence varie entre les limites possibles, c'est-à-dire entre $-$NOP et $+90^\circ$ (*fig.* 9) quand l'angle du prisme est moindre que l'angle limite; entre $+$QON et $+90^\circ$ (*fig.* 10) dans le cas contraire.

On a, d'après la formule (4),

$$dD = di + di', \tag{7}$$

et les relations (2) et (5) donnent

$$dr' = -dr,$$

$$di = n\frac{\cos r}{\cos i}dr, \qquad di' = -n\frac{\cos r'}{\cos i'}dr,$$

d'où

$$dD = n\left(\frac{\cos r}{\cos i} - \frac{\cos r'}{\cos i'}\right)dr. \tag{8}$$

Il s'ensuit que dD augmente avec r tant que l'on a

$$\frac{\cos r}{\cos i} - \frac{\cos r'}{\cos i'} > 0$$

et décroît dans le cas contraire. Or cette expression ne s'annule que pour $r = r'$ et $i = i'$, ou pour $i = -i'$, $r = -r'$. En effet, si l'on a

$$\frac{\cos r}{\cos i} = \frac{\cos r'}{\cos i'},$$

comme

$$\frac{\sin r}{\sin i} = \frac{\sin r'}{\sin i'},$$

on a

$$\cos^2 i + \sin^2 i = \cos^2 i\frac{\cos^2 r'}{\cos^2 i'} + \sin^2 i\frac{\sin^2 r'}{\sin^2 i'},$$

d'où

$$\cos^2 i\frac{\cos^2 i' - \cos^2 r'}{\cos^2 i'} = \sin^2 i\frac{\sin^2 r' - \sin^2 i'}{\sin^2 i'}$$

et, par suite,

$$\operatorname{tang}^2 i = \operatorname{tang}^2 i'.$$

Or, d'après ce qui a été dit sur le sens de la déviation, on ne

peut jamais avoir $i = -i'$. La dérivée $\frac{dD}{dr}$ ne change donc de signe que pour $i = i'$, c'est-à-dire quand le rayon incident et le rayon émergent sont également inclinés sur la base du prisme. Les angles r et r' sont alors égaux à $\frac{A}{2}$, de sorte que ce rayon n'est possible que si $\frac{A}{2}$ est moindre que l'angle limite. Il en est toujours ainsi dans la pratique.

Nous avons vu que, si A est moindre que l'angle limite, le rayon NO (*fig.* 9) émerge sûrement; or, pour ce rayon, la dérivée $\frac{dD}{dr}$ est visiblement négative; donc le rayon MO pour lequel $\frac{dD}{dr}$ est nulle correspond à une déviation *minimum*.

Si A est supérieur à l'angle limite (*fig.* 9), le rayon BO émerge sûrement. Pour un rayon très voisin de BO, la dérivée $\frac{dD}{dr}$ est très grande et positive; donc D croît quand r approche de L. Ici encore, on voit que la déviation est minimum pour $r = \frac{A}{2}$.

80. **Dispersion par un prisme.** — La déviation d'un rayon dépend de l'indice. Si un faisceau incident est formé de rayons ayant des longueurs d'onde diverses, l'indice variera de l'un à l'autre, et, par suite, la déviation variera également : le rayon sera dispersé.

Si n désigne une valeur moyenne de l'indice, $n + dn$ un indice voisin, les formules (4) et (5) donnent la déviation D relative au rayon d'indice moyen, et, en différentiant ces formules, on obtient la dispersion dD. On a

$$\begin{aligned} dD &= di', \\ \cos i'\, di' &= \sin r'\, dn + n \cos r'\, dr', \\ 0 &= \sin r\, dn + n \cos r\, dr, \\ dr' &= -dr, \end{aligned}$$

d'où

$$dD = \frac{\sin A}{\cos r \cos i'}\, dn. \tag{9}$$

81. **Dispersion minimum.** — La formule (9) montre que la dispersion est infinie quand i' est droit. Elle varie comme l'inverse du produit $\cos r \cos i'$. Nous allons chercher si la dérivée de ce

produit peut s'annuler. En l'annulant, on obtient l'équation

$$\text{tang} r\, dr + \text{tang} i'\, di' = 0. \tag{10}$$

Or, en différentiant la deuxième formule (5) et éliminant n au moyen de cette même formule (5), on trouve

$$\cot r'\, dr' = \cot i'\, di', \tag{11}$$

Comme par la relation (2)

$$dr' = -\, dr,$$

on déduit des formules (10) et (11)

$$\text{tang} r \,\text{tang} r' = \text{tang}^2 i', \tag{12}$$

équation qui montre que r et r' sont de même signe et, par suite, sont positifs.

Il est aisé d'éliminer r et i' entre cette équation (12), la relation (2), et la seconde formule (5). On a à cet effet, en tenant compte de la formule (12),

$$\text{tang}(r - r') = \frac{\text{tang}^2 i' - \text{tang}^2 r'}{\text{tang} r'(1 + \text{tang}^2 i')} = \frac{\text{tang}^2 i'(1 + \text{tang}^2 r') - \text{tang}^2 r'(1 + \text{tang}^2 i')}{\text{tang} r'(1 + \text{tang}^2 i')}$$

$$= \frac{\sin^2 i'}{\sin r' \cos r'} - \text{tang} r' = (n^2 - 1)\,\text{tang} r'$$

et, par suite,

$$\text{tang}(A - 2r') = (n^2 - 1)\,\text{tang} r'. \tag{13}$$

Les valeurs de r' sont comprises entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, de sorte que chaque valeur de $\text{tang} r'$, déduite de l'équation (13), donne une valeur de r' et une seule.

L'équation est du troisième degré en $\text{tang} r'$; ses trois racines sont réelles pour toute valeur positive de $n^2 - 1$.

Nous bornant au cas où A est aigu, on voit sans peine que la fonction

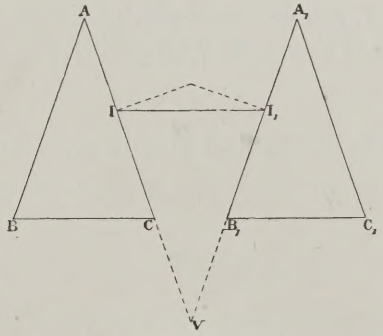
$$\frac{\text{tang}(A - 2r')}{\text{tang} r'} - (n^2 - 1)$$

change de signe entre -90° et $-\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A}{2}\right)$, entre 0 et $\frac{A}{2}$, entre $\frac{A}{2} + \frac{\pi}{2}$ et $+90^\circ$. La valeur comprise entre 0 et $\frac{A}{2}$ est seule acceptable, puisqu'elle est la seule à laquelle corresponde une valeur positive de r.

Dans le cas où l'angle du prisme est moindre que l'angle limite (*fig.* 9), la valeur comprise entre o et $\frac{A}{2}$ se présente réellement et correspond à un minimum de la dispersion. En effet, si le rayon incident tourne de BO à DO, r est positif, r' négatif, et la différence $|r| - |r'|$ de leurs valeurs absolues est A; r décroît de L à A, $|r'|$ diminue donc aussi de L — A à o, et i' diminue depuis sa valeur extrême jusqu'à zéro; $\cos r$ et $\cos i'$ augmentent donc l'un et l'autre et dD diminue. Entre DO et NO, r, r', i' sont positifs; r diminue et i' augmente et l'on ne voit pas immédiatement comment varie dD; mais, de NO à PO, r augmente en valeur absolue, ainsi que r' et i'; donc dD augmente. Il y a donc nécessairement entre DO et NO un minimum de dispersion, et l'on a montré au présent paragraphe qu'il n'y en a qu'un.

82. Déviation par un système de prismes à arêtes parallèles. — Quand un faisceau lumineux traverse successivement deux prismes à arêtes parallèles, ceux-ci peuvent être disposés de la même ma-

Fig. 11.



nière, ou bien être inverses. Le second cas se présente quand les faces par lesquelles le rayon pénètre dans les prismes ne sont pas placées de la même manière par rapport aux bases de ces prismes.

Considérons d'abord un système (*fig.* 11) de deux prismes ABC, $A_1B_1C_1$ disposés de la même manière (¹). Soient i' et i_1 l'angle

(¹) Dans les *fig.* 11 à 14, II_1 est un rayon passant du prisme ABC au prisme $A_1B_1C_1$, et les lignes ponctuées en I, I_1 représentent les normales aux faces AC, A_1B_1 en ces points I, I_1.

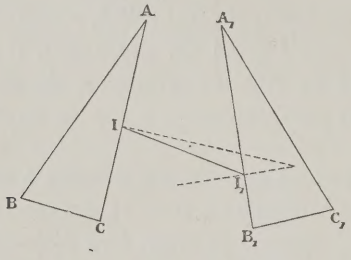
d'émergence à la sortie I′ du premier prisme et l'angle d'incidence en I_1 sur le second.

Si V désigne l'angle des deux faces AC et A_1B_1 prolongées dans le sens AC et dans le sens A_1B_1, on a visiblement

$$V = i' + i_1, \tag{14}$$

et cette formule, où V est un angle connu, permet de déduire i_1 de i' et, par suite, de suivre le rayon dans son passage d'un prisme à l'autre.

Fig. 12.

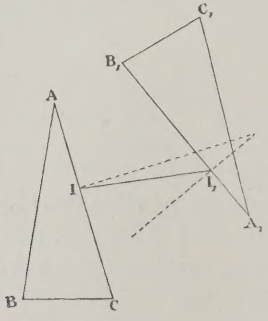


Si le point de rencontre des faces AC, A_1B_1 se trouvait au delà des sommets A, A_1 comme sur la *fig.* 12, l'angle d'incidence en I_1 étant négatif quand l'angle en I′ est positif, la relation serait

$$-i_1 = i' + V,$$

et cette relation se confondrait avec la précédente en supposant

Fig. 13.



que l'angle des deux faces soit représenté par un nombre négatif.

Dans le cas de deux prismes inverses (*fig.* 13 et 14), la même relation subsistera encore, pourvu que l'angle V soit représenté

par un nombre positif quand la rencontre des faces AC, A_1B_1 a lieu au delà du sommet A (*fig.* 13), par un nombre négatif dans le cas contraire (*fig.* 14), que l'on change les signes des angles i_1, r_1, r'_1, i'_1 supposés fixés comme à l'ordinaire, et que l'on représente l'angle A_1 par un nombre négatif.

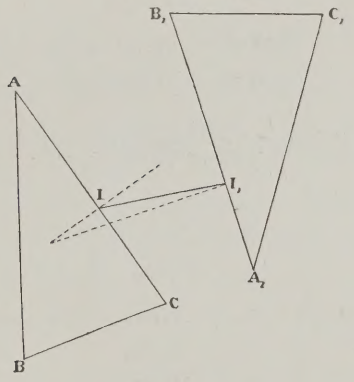
Moyennant ces conventions, la déviation produite par le système est toujours

$$+ i' - A + i_1 + i'_1 - A_1,$$

ou

$$i + i'_1 + V - A - A_1. \tag{15}$$

Fig. 14.



Si l'on a un système de n prismes à arêtes parallèles, on appliquera les mêmes conventions sur les signes, et la déviation totale sera

$$i + i'_{n-1} + \Sigma v_k - \Sigma A_k. \tag{16}$$

83. **Déviation minimum dans un système de prismes à arêtes parallèles.** — Si tous les prismes sont placés de la même manière, chacun rapproche le rayon de sa base, de sorte que, si l'on veut que la déviation totale soit nulle, il faudra qu'un au moins des prismes soit inverse. L'équation

$$i + i'_{n-1} + \Sigma v_k - \Sigma A_k = 0, \tag{17}$$

où i'_{n-1} est une fonction de i, déterminera la position du rayon incident pour lequel le système ne donne pas de déviation. Cette position dépend au reste de la longueur d'onde du rayon incident,

de sorte que le système ne sera à vision directe que pour un rayon particulier.

Dans le cas où les prismes sont de même sens, la déviation a un minimum que l'on obtient par l'équation

$$di + di'_{n-1} = 0. \tag{18}$$

L'équation (14) donne au reste

$$\begin{cases} di' + di_1 = 0, \\ di'_1 + di_2 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots, \\ di'_{n-2} + di_{n-1} = 0; \end{cases} \tag{19}$$

on a aussi

$$dr_k + dr'_k = 0.$$

$$\cos i_k \, di_k = n_k \cos r_k \, dr_k,$$

$$\cos i'_k \, di'_k = n_k \cos r'_k \, dr'_k,$$

d'où

$$di_k + \frac{\cos i'_k \cos r_k}{\cos i_k \cos r'_k} di'_k = 0$$

ou, posant

$$f_k = \frac{\cos r_k \cos i'_k}{\cos r'_k \cos i_k}, \tag{20}$$

$$\begin{cases} di + f \, di' = 0, \\ di_1 + f_1 \, di'_1 = 0, \\ di_2 + f_2 \, di'_2 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ di_{n-1} + f_{n-1} \, di'_{n-1} = 0. \end{cases} \tag{21}$$

Si l'on tient compte des équations (17) et (18),

$$\begin{cases} di = f \, di_1, \\ di_1 = f_1 \, di_2, \\ di_2 = f_2 \, di_3, \\ \dots\dots\dots\dots, \\ di_{n-2} = f_{n-2} \, di_{n-1}, \\ di_{n-1} = f_{n-1} \, di. \end{cases} \tag{22}$$

On en conclut

$$1 = f f_1 f_2 \dots f_{n-1}. \tag{23}$$

Cette équation, combinée avec les équations (2), (5), (14), déterminera l'angle d'incidence i auquel correspond la déviation minimum.

84. Dispersion par un système de prismes à arêtes parallèles. Achromatisme. — Si nous conservons les notations antérieures, nous avons, pour le premier prisme (9),

$$\cos r \cos i' \, di' = \sin A \, dn.$$

La relation (14) donne ensuite

$$di_1 = -di'.$$

Puis les formules

$$\sin i_1 = n_1 \sin r_1,$$
$$\sin i'_1 = n_1 \sin r'_1,$$
$$r_1 + r'_1 = A_1$$

donnent

$$\cos i_1 \, di_1 = n_1 \cos r_1 \, dr_1 + \sin r_1 \, dn_1,$$
$$dr'_1 = -dr_1,$$
$$\cos i'_1 \, di'_1 = n_1 \cos r'_1 \, dr'_1 + \sin r'_1 \, dn_1.$$

On en conclut, par substitutions successives,

$$\cos r_1 \cos i'_1 \, di'_1 = \sin A_1 \, dn_1 + \sin A \frac{\cos r'_1 \cos i_1}{\cos r \cos i'} \, dn. \tag{24}$$

Ordinairement le rayon moyen traverse les prismes dans la position qui correspond à la déviation minimum; la formule (22) se réduit, pour un système de deux prismes, à

$$\cos r' \cos i \cos r'_1 \cos i_1 = \cos r \cos i' \cos r_1 \cos i'_1. \tag{25}$$

85. Achromatisme d'un système de deux prismes. — En supposant que les angles i, r, ..., et les indices n, n_1 se rapportent à un rayon moyen, on dira que le système est achromatique si di'_1 est nul. En vérité, le spectre est alors simplement replié sur lui-même; si, par exemple, on a pris, comme rayons moyens, les rayons jaunes, le spectre sera bordé d'un côté par une couleur jaune, où sera le maximum d'éclat, et de l'autre par une teinte composée de rouge et de violet. Le *spectre secondaire* ainsi obtenu a, en général, une ouverture très petite.

La condition d'achromatisme est

$$\frac{\sin A_1 \, dn_1}{\cos i_1 \cos r'_1} + \frac{\sin A \, dn}{\cos i' \cos r} = 0. \tag{26}$$

La relation (1) permet d'exprimer dn_1 en fonction de dn; mais on voit qu'il n'est possible de satisfaire à la condition (26) qu'en négligeant dans la relation (1) le dernier terme.

86. **Achromatisme d'un système de plusieurs prismes.** — Il est manifeste que l'on calculerait, par l'application réitérée de la marche du n° 14, la dispersion par un système de plusieurs prismes. On pourrait alors annuler non seulement la dérivée de la déviation par rapport au premier indice, mais encore les dérivées successives, en nombre inférieur d'une unité à celui des prismes employés. Les spectres tertiaires et suivants sont de plus en plus étroits, et l'achromatisme de mieux en mieux réalisé.

87. **Aberration de réfrangibilité dans les lentilles.** — Toutes les formules données au Chapitre III, pour l'étude de la marche d'un rayon lumineux dans un instrument d'Optique et de la formation des images, dépendent des indices de réfraction. Si la lumière n'est pas homogène, un même rayon incident est généralement décomposé à la sortie de l'instrument en rayons de couleurs et de directions différentes, et un point lumineux donne une infinité d'images, correspondant aux diverses longueurs d'onde. C'est l'ensemble de ces faits que l'on désigne sous le nom d'*aberration de réfrangibilité*.

88. **Aberration de réfrangibilité dans une lentille.** — Pour nous rendre compte de l'importance de cette aberration, nous examinerons les positions des images d'un point lumineux infiniment éloigné produites par une lentille unique.

Si a désigne la distance focale principale de cette lentille, n l'indice, R, R′ les rayons de courbure de la lentille, on a, en négligeant l'épaisseur,

$$\frac{1}{a} = (n-1)\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right).$$

Si l'indice varie de δn, on aura

$$\frac{\delta a}{a} = -\frac{\delta n}{n-1}. \tag{27}$$

Si la matière de la lentille est le flint (13) de Fraunhofer (§ 73) et que n désigne l'indice de la raie F, et $n+\delta n$ celui de la raie H, on a

$$n - 1 = 0{,}648,$$
$$\delta n = 0{,}023.$$

La formule (27) donne

$$\frac{\delta a}{a} = -\frac{23}{648} = -\frac{1}{28}.$$

Si la matière est le crown (9), on a

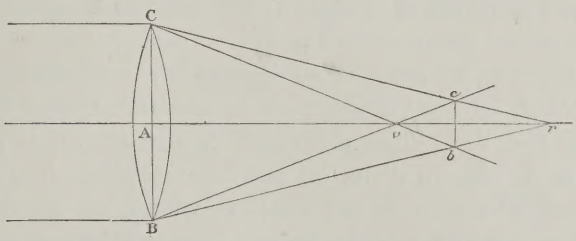
$$\frac{\delta a}{a} = -\frac{1}{49}.$$

Si la lentille a une distance focale de 4^m, ce qui est une dimension courante en Astronomie, et que la matière soit le flint (13), la distance du foyer moyen et du foyer correspondant à la raie H, dépassera $0^m,14$.

89. **Cercle minimum d'aberration.** — En vérité, le plus ou moins d'écartement des foyers le long de l'axe n'est pas ce qui importe le plus dans le phénomène; l'essentiel, pour la vision, est que les rayons de diverses couleurs se trouvent quelque part réunis dans un cercle de très petit rayon dont le plan soit perpendiculaire à l'axe.

Soient (*fig.* 15) BC la lentille; v, r les foyers principaux pour les rayons violets et les rayons rouges.

Fig. 15.



La diagonale bc du quadrilatère $CvBrC$ est le diamètre du cercle d'aberration minimum.

On trouve sans peine la relation

$$\frac{bc}{BC} = \frac{vr}{vA + rA}$$

ou, à peu près,

$$\frac{bc}{BC} = \frac{vr}{2a} = \frac{1}{2}\frac{\delta n}{n-1},$$

de sorte que, pour une lentille d'ouverture donnée, le cercle d'aber-

ration minimum a un diamètre indépendant de la longueur focale.

Nous verrons au Chapitre VI que le grossissement, pour un oculaire donné, est proportionnel à la longueur focale de l'objectif. Il s'ensuit que, pour une même ouverture, on peut, sans modifier l'aberration, obtenir un grossissement d'autant plus fort que la distance focale de l'objectif est plus grande. C'est pour ce motif que, avant l'invention des objectifs achromatiques, on construisait des lunettes de 50^m de longueur.

90. **Achromatisme d'un objectif astronomique.** — Un objectif astronomique est un système de lentilles destiné à donner une image réelle de points lumineux infiniment éloignés.

Si l'on veut qu'un tel système soit achromatique, il faudra, d'après la construction de Gauss, que le second plan principal E′ et le second plan focal Φ′ soient indépendants de la longueur d'onde du rayon lumineux. Il faut, en effet, que Φ′ soit fixe pour que l'image d'un point infiniment éloigné ait une abscisse indépendante de la couleur, et que E′ le soit, pour que la distance de l'image à l'axe le soit aussi, et ces conditions sont manifestement suffisantes.

Si l'on se donne aussi *a priori* la distance focale principale Φ′ — E′, la courbure et la position des lentilles composant le système ne seront soumises qu'à trois conditions.

Il ne faut pas, au reste, se méprendre sur le sens des mots *fixe* ou *constant,* ou *indépendant de la couleur*. Quand les verres employés sont de matière différente, la variation de la puissance réfractive de chacun d'eux est une fonction de celle d'un autre, exprimée par la relation (1). Cette relation n'est pas linéaire. Il s'ensuit que, si l'on calcule, comme nous le ferons ci-dessous, la variation de Φ′, ou celle de E′ qui correspond à un changement de couleur représenté par une variation δn de l'indice relatif à l'une des lentilles, cette variation de Φ′ ou de E′ ne sera pas rigoureusement proportionnelle à δn, et l'on ne pourra pas en toute rigueur l'annuler pour toutes les valeurs de δn. En particulier, si on l'a annulée pour une valeur δn, elle ne sera pas nulle pour la valeur $-\delta n$.

Pour ce motif, on doit, dans un calcul rigoureux, prendre pour n et $n + \delta n$ deux rayons comprenant entre eux les rayons

moyens. Si cependant on se proposait de construire un objectif photographique, il importerait de reporter les rayons regardés comme moyens vers le violet, les rayons rouges n'ayant aucune importance.

91. Conditions d'achromatisme d'un objectif astronomique en supposant les lentilles infiniment minces et la relation entre les puissances réfractives linéaire. — Soient

$E_0 = E'_0$ les plans principaux confondus de la première lentille;
$E_1 = E'_1$ ceux de la seconde;
φ_0, φ_1 les distances focales;
t_1 la distance $E_1 - E'_0$.

L'abscisse E′ du second plan principal du système est

$$E' = E'_1 - \frac{\varphi}{\varphi_0} t_1. \tag{28}$$

La distance focale φ est donnée par l'équation

$$-\frac{1}{\varphi} = \frac{t_1}{\varphi_0 \varphi_1} - \frac{1}{\varphi_0} - \frac{1}{\varphi_1}. \tag{29}$$

Nous écrirons que φ_0, φ_1, t_1 satisfont à l'équation (29), et en outre que $\delta E'$ et $\delta \frac{1}{\varphi}$ sont nulles, ce qui nous donne les équations

$$\begin{cases} \varphi t_1 \delta \dfrac{1}{\varphi_0} = 0, \\ t_1 \delta \dfrac{1}{\varphi_0 \varphi_1} - \delta \dfrac{1}{\varphi_0} - \delta \dfrac{1}{\varphi_1} = 0. \end{cases} \tag{30}$$

La variation $\delta \frac{1}{\varphi_0}$ ne pouvant être nulle, la première équation (29) donne $t_1 = 0$. *Les deux lentilles doivent être en contact.*

Les deux autres conditions deviennent, en tenant compte de la formule (26),

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\varphi_0} + \dfrac{1}{\varphi_1} = \dfrac{1}{\varphi}, \\ \dfrac{1}{\varphi_0} \dfrac{\delta n_0}{n_0 - 1} + \dfrac{1}{\varphi_1} \dfrac{\delta n_1}{n_1 - 1} = 0. \end{cases} \tag{31}$$

Si l'on réduit la relation (1) à

$$\frac{\delta n_1}{n - 1} = \alpha \frac{\delta n_0}{n_0 - 1},$$

on aura

$$\frac{1}{\varphi} + \frac{\alpha}{\varphi_1} = 0; \tag{32}$$

φ_0 et φ_1 seront de signes contraires, de sorte que l'une des lentilles doit être convergente et l'autre divergente.

92. **Exemple de ce qu'était l'aberration de réfrangibilité dans un objectif de Fraunhofer étudié par Biot.** — Cet objectif était formé d'un crown et d'un flint. L'indice moyen n du crown était 1,5300; ses rayons et son épaisseur exprimés au moyen d'une certaine unité

$$r_0 = 1794,2490, \qquad r'_0 = -714,4946, \qquad e_0 = 10,72.$$

La variation d'indice, quand on passait du rayon moyen au rouge, était

$$\delta n_0 = -0,0090.$$

Les nombres analogues pour le flint étaient

$$n_1 = 1,6345, \qquad \delta n_1 = -0,0178,$$
$$r_1 = -728,1631, \qquad r'_1 = -2611,8960, \qquad e_1 = 8,45.$$

L'application des formules de Gauss à la détermination des éléments de l'objectif, donne :

	Rayons moyens.	Rayons rouges.
φ_0	965,626	982,290
φ_1	— 1594,019	— 1639,978
φ	2449,449	2449,339
E'.....	$M'_1 -$ 7,171	$M'_1 -$ 7,226
Φ	$M'_1 + 2442,278$	$M'_1 + 2442,113$

L'écart des deux foyers qui eût été près de 17 pour le crown et 46 pour le flint a donc été réduit à 0,165.

93. **Achromatisme des oculaires de lunettes astronomiques.** — L'objectif donne une image réelle d'un point infiniment éloigné. Nous verrons que le système oculaire a pour but de reprendre le faisceau lumineux de façon à obtenir une image virtuelle placée en arrière de l'anneau oculaire à une distance égale à celle de la vision distincte. Pour un œil dit *normal,* les rayons issus d'un même point doivent émerger parallèlement.

Considérons un instrument formé d'un objectif que nous supposerons achromatique et d'un oculaire à deux verres formés tous deux de même matière. Supposons les lentilles infiniment minces; soient φ_0, φ_1, φ_2 leurs distances focales principales $M_0 - \Phi_0$, $M_1 - \Phi_1$, $M_2 - \Phi_2$.

D'après la théorie de Gauss, si l'on pose

$$u_0 = -\frac{1}{\varphi_0}, \qquad u_1 = -\frac{1}{\varphi_1}, \qquad u_2 = -\frac{1}{\varphi_2},$$
$$t_1 = M_1 - M_0, \qquad t_2 = M_2 - M_1,$$

les éléments du système dépendent des deux dernières réduites $\frac{G}{H}$, $\frac{K}{L}$ de la fraction continue

$$u_0 + \cfrac{1}{t_1 + \cfrac{1}{u_1 + \cfrac{1}{t_2 + \cfrac{1}{u_2}}}}.$$

La condition, que les rayons issus d'un même point situé à l'infini doivent émerger parallèlement donne

$$K = 0,$$

ou

$$\frac{1}{\varphi_1} = \frac{1}{t_1 - \varphi_0} + \frac{1}{t_2 - \varphi_2}, \tag{33}$$

qui peut aussi s'écrire

$$(\varphi_0 + \varphi_1 - t_1)(\varphi_2 + \varphi_1 - t_2) = \varphi_1^2. \tag{34}$$

Le grossissement angulaire est L

$$L = 1 - \frac{t_1}{\varphi_1} - \frac{t_1 + t_2}{\varphi_2} + \frac{t_1 t_2}{\varphi_1 \varphi_2}; \tag{35}$$

et, en tenant compte de la relation (32), on trouve

$$L = -\frac{\varphi_0 \varphi_1}{\varphi_2(\varphi_0 + \varphi_1 - t_1)} = -\frac{\varphi_0}{\varphi_1 \varphi_2}(\varphi_1 + \varphi_2 - t_2). \tag{36}$$

Le système sera achromatique si la variation de longueur d'onde ne modifie pas le grossissement linéaire, puisque les images d'un point provenant de rayons de couleurs différentes seront vues dans la même direction. Il est bien vrai que la condition (33) ne

sera satisfaite qu'approximativement pour un rayon d'indice voisin de celui du rayon moyen; mais l'inconvénient qui en résultera sera beaucoup moindre que ne le serait une variation de L, c'est-à-dire un changement de direction des diverses images.

La condition d'achromatisme est donc

$$\delta L = 0, \tag{37}$$

et il y a lieu d'observer que les petites lentilles qui constituent l'oculaire sont nécessairement voisines l'une de l'autre et du foyer principal de l'objectif, de sorte que t_2 est, à cause de leurs petites dimensions, très petit par rapport à t_1.

La formule (35) donne

$$\delta L = -t_1 \delta \frac{1}{\varphi_1} - (t_1 + t_2)\,\delta \frac{1}{\varphi_2} + t_1 t_2 \left(\frac{1}{\varphi_2} \delta \frac{1}{\varphi_1} + \frac{1}{\varphi_1} \delta \frac{1}{\varphi_2} \right).$$

Les deux verres de l'oculaire étant de même nature, si l'on désigne par n leur indice moyen, on a

$$\delta \frac{1}{\varphi_1} = \frac{1}{\varphi_1} \frac{\delta n}{n-1}, \qquad \delta \frac{1}{\varphi_2} = \frac{1}{\varphi_2} \frac{\delta n}{n-1}.$$

L'équation (36) devient donc

$$0 = -\frac{t_1}{\varphi_1} - \frac{t_1 + t_2}{\varphi_2} + \frac{2 t_1 t_2}{\varphi_1 \varphi_2}$$

ou

$$\frac{2 t_2}{\varphi_1 \varphi_2} = \frac{1}{\varphi_1} + \frac{1 + \dfrac{t_2}{t_1}}{\varphi_2}. \tag{38}$$

Si l'on néglige le rapport $\frac{t_2}{t_1}$, on obtient

$$t_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}. \tag{39}$$

CHAPITRE V.

THÉORIE DES INSTRUMENTS D'OPTIQUE EN DEUXIÈME APPROXIMATION. — ABERRATION DE SPHÉRICITÉ D'UNE LENTILLE. — PROPRIÉTÉ DES FAISCEAUX INFINIMENT MINCES. — LIGNES FOCALES. — CAS DU PRISME.

94. **Aberration de sphéricité.** — La théorie de Gauss n'est qu'une première approximation, et il est nécessaire de se rendre compte des écarts qu'elle peut offrir avec la réalité. L'expérience prouve que ces écarts sont sensibles. Des rayons lumineux issus d'un point, après réfraction sur une surface sphérique, ne passent plus par un même point, de sorte qu'un point n'a pas, rigoureusement parlant, une image. Si l'on ne considère que des rayons primitifs peu inclinés sur l'un d'eux, on appelle *image du point,* la section du faisceau émergent par un plan perpendiculaire à l'axe de l'instrument, la plus favorable à la vision, et l'on peut chercher quelles sont les combinaisons de surfaces réfringentes qui rendent cette image minimum et, en particulier, si cette image peut se réduire à un point. Dans ce dernier cas, ce système est dit *aplanétique*. Il est aussi nécessaire d'examiner si les images de points, situés dans un plan perpendiculaire à l'axe, sont aussi dans un tel plan, de telle façon que l'œil puisse voir distinctement et à la fois les images des points d'un objet, et enfin si le rapport des distances des images à l'axe est égal au rapport de distances des points eux-mêmes à cet axe.

L'étude approfondie de ces questions nécessite de longs calculs; elle montre que les combinaisons qui offrent le plus d'avantages ne sont pas les mêmes aux divers points de vue; nous nous bornerons à traiter successivement divers problèmes particuliers, de manière à donner idée de ce qui se passe dans les cas les plus simples.

95. **Réfraction par une seule surface, en deuxième approximation.** — Si nous reprenons la figure et les notations du § 48, et

si nous désignons, en outre, par O — $r\cos\theta\, y_0 z_0$, O$y_1 z_1$, O$y'_1 z'_1$ les coordonnées des points P, Q, Q', nous écrirons :

1° Que les rayons incident et réfracté passent par le point P

$$(1)\qquad \begin{cases} y_0 = \dfrac{\beta}{n} r(1-\cos\theta) + b = \dfrac{\beta'}{n'} r(1-\cos\theta) + b', \\ z_0 = \dfrac{\gamma}{n} r(1-\cos\theta) + c = \dfrac{\gamma'}{n'} r(1-\cos\theta) + c', \end{cases}$$

avec

$$y_0^2 + z_0^2 = r^2 \sin^2\theta;$$

2° Que

$$\frac{y_1}{y'_1} = \frac{z_1}{z'_1} = \left(\frac{OQ}{OQ'}\right) = \frac{n'}{n}\frac{\sin OQ'P}{\sin OQP} = \frac{n'}{n}\frac{PQ}{PQ'},$$

ce qui donne les équations

$$(2)\qquad \frac{\dfrac{\beta}{n} r + b}{\dfrac{\beta'}{n'} r + b'} = \frac{\dfrac{\gamma}{n} r + c}{\dfrac{\gamma'}{n'} r + c'} = \frac{n'}{n}\frac{\sqrt{1 + \dfrac{\beta^2+\gamma^2}{n^2}}}{\sqrt{1 + \dfrac{\beta'^2+\gamma'^2}{n'^2}}}.$$

Les sept équations (1) et (2) permettent de déterminer θ, y_0, z_0, b', c', β', γ' en fonction de b, c, β, γ, n, n' et, par conséquent, de déduire les équations du rayon réfracté de celles du rayon incident.

En conservant les termes du troisième ordre, on tire des équations (1)

$$(1^*)\qquad \begin{cases} 0 = \dfrac{\sqrt{b^2+c^2}}{r}\left(1 + \dfrac{b\beta + c\gamma}{2nr}\right), \\ b' = b + \dfrac{b^2+c^2}{2r}\left(\dfrac{\beta}{n} - \dfrac{\beta'}{n'}\right), \\ c' = c + \dfrac{b^2+c^2}{2r}\left(\dfrac{\gamma}{n} - \dfrac{\gamma'}{n'}\right). \end{cases}$$

Après quoi les équations (2) donnent pour β' et γ' des valeurs formées de termes du premier et du troisième ordre qu'il est inutile d'écrire ici, puisque nous ne les utiliserons pas sous leur forme générale.

96. **Cas où l'on n'envisage que des rayons situés dans un plan passant par l'axe.** — Si l'on prend ce plan pour plan des x, y, z_0, γ, c, γ', c' s'annulent, et les équations (1) et (2), résolues en

regardant r et θ comme donnés, deviennent

$$(3)\qquad \begin{cases} r\sin\theta = \dfrac{\beta}{n}\,r(1-\cos\theta) + b = \dfrac{\beta'}{n'}\,r(1-\cos\theta) + b', \\ \dfrac{n^2\left(\dfrac{\beta}{n}\cos\theta + \sin\theta\right)^2}{1+\dfrac{\beta^2}{n^2}} = \dfrac{n'^2\left(\dfrac{\beta'}{n'}\cos\theta + \sin\theta\right)^2}{1+\dfrac{\beta'^2}{n'^2}}. \end{cases}$$

97. Cas où l'on regarde comme négligeable toute puissance de θ supérieure à la première. — On a alors

$$(4)\qquad \begin{cases} b = r\theta, \\ b' = r\theta, \\ \dfrac{n^2\left(\dfrac{\beta}{n} + \theta\right)^2}{1+\dfrac{\beta^2}{n^2}} = \dfrac{n'^2\left(\dfrac{\beta'}{n'} + \theta\right)^2}{1+\dfrac{\beta'^2}{n'^2}}. \end{cases}$$

Si l'on pose

$$\beta' + n'\theta = \beta + n\theta + z,$$

z est du troisième ordre, et l'on en négligera le carré vis-à-vis de la première puissance; on a ainsi facilement

$$\frac{2z}{\beta^3} = -\frac{\beta\left(\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{n'^2}\right) + 2\theta\left[n\left(\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{n'^2}\right) - \dfrac{n-n'}{n'^2}\right]}{\beta + n\theta},$$

$$2z = -\beta^3\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n'^2}\right) - 0\beta^2\left[n\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n'^2}\right) - 2\frac{n-n'}{n'^2}\right],$$

d'où

$$(5)\qquad \beta' = \beta - \frac{n'^2-n^2}{n^2n'^2}\,\frac{\beta^3}{2} + (n-n')\theta - \frac{0\beta^2}{2}\,\frac{(n'-n)(n'+3n)}{nn'^2}.$$

98. Application des formules du numéro précédent au cas d'une lentille. — D'après ce qui précède, l'équation du rayon incident étant

$$y = \frac{\beta}{n}(x-\mathrm{M}) + b,$$

celles du rayon réfracté est

$$y = \frac{\beta'}{n'}(x-\mathrm{M}) + b,$$

β' étant donné par la formule (5), qui est de la forme

$$(6)\qquad \beta' = \varphi + 0\psi.$$

Si ce rayon réfracté rencontre une seconde surface dont le sommet M_1 a une abscisse $M + e$ très peu différente de M, on en écrira l'équation sous la forme

$$y = \frac{\beta'}{n'}(x - M_1) + b_1,$$

et, comme

$$b_1 = \frac{\beta'}{n'}e + b,$$

les puissances de b_1 pourront être négligées si $\beta' e$ est de l'ordre de b, ce que nous supposerons.

Si le rayon, après avoir traversé la seconde surface, rentre dans le second milieu, l'équation du rayon émergent sera

$$y = \frac{\beta''}{n}(x - M_1) + b_1 \tag{7}$$

et

$$\beta'' = \varphi' + \theta_1 \psi',$$

θ_1 étant égal à $\frac{b_1}{r'}$ et φ' et ψ' désignant les valeurs que prennent φ et ψ quand on y remplace β par β' après y avoir interverti n et n'. On a

$$\begin{cases} \varphi = \beta - \frac{1}{2}\,\frac{n'^2 - n^2}{n^2 n'^2}\,\beta^3, \\ \psi = n - n' + \frac{1}{2}\,\frac{(n - n')(n' + 3n)}{nn'^2}\,\beta^2, \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} \varphi' = \beta' + \frac{1}{2}\,\frac{n'^2 - n^2}{n^2 n'^2}\,\beta'^3, \\ \psi' = -(n - n') - \frac{1}{2}\,\frac{(n - n')(n + 3n')}{n^2 n'}\,\beta'^2, \\ \theta_1 = \frac{1}{r'}\left(r\theta + \frac{e\beta'}{n'}\right). \end{cases} \tag{9}$$

99. Foyer de rayons parallèles très voisins du sommet. — Nous chercherons la limite du point de rencontre du rayon (7) avec le rayon analogue pour lequel θ est nul.

L'équation de ce second rayon étant

$$y = \frac{\beta''_0}{n}(x - M_1) + b_1^{(0)},$$

β''_0 et $b_1^{(0)}$ étant ce que deviennent β'' et b_1, quand θ s'annule, on a,

pour le point de rencontre cherché,

$$x - M_1 = - \frac{b_1 - b_1^{(0)}}{\frac{\beta''}{n} - \frac{\beta_0''}{n}}$$

et à la limite

$$x - M_1 = - n \frac{r + e\frac{n - n'}{n'}}{(n - n')\left(1 - \frac{r}{r'} - \frac{n - n'}{n' r'} e\right) + \frac{1}{2}\frac{(n - n')(n + 3n')}{n^2 n'}\left(1 - \frac{r}{r'}\right)\beta^2}.$$

Si nous supposons la lentille convergente, le premier terme du dénominateur est négatif; le second l'est aussi : il s'ensuit que $x - M_1$ a la plus petite valeur possible quand β est nul, ou pour les rayons centraux.

Comme on a sensiblement, pour équation du rayon central,

$$y = \beta \frac{x - M_1}{n},$$

on voit que le lieu des images qui correspondent aux diverses valeurs de β est dans le voisinage de l'axe de l'instrument une parabole dont la concavité est tournée vers la lentille. Cette parabole n'est jamais un plan, r n'étant jamais égal à r'.

Supposons, comme exemple, une lentille biconvexe à courbures égales. Nous aurons, en négligeant l'épaisseur,

$$x - M_1 = \frac{nr}{2(n' - n)\left[1 + \frac{n + 3n'}{2n'}\left(\frac{\beta}{n}\right)^2\right]} = \frac{nr}{2(n' - n)}\left[1 - \frac{n + 3n'}{2n'}\left(\frac{\beta}{n}\right)^2\right].$$

Si l'indice $\frac{n'}{n}$ est $\frac{3}{2}$, on a

$$\frac{x - M_1}{r} = 1 - \frac{11}{6}\left(\frac{\beta}{n}\right)^2.$$

Dans les objectifs destinés à la Photographie, $\frac{\beta}{n}$ peut atteindre tang 2°, ou environ $\frac{1}{30}$, $\left(\frac{\beta}{n}\right)^2$ sera $\frac{1}{900}$; $x - M_1$ différera de r d'environ $\frac{1}{500}$ de r. Si la distance focale est 4^m, ce sera 8^{mm}.

Si l'on néglige les termes du *quatrième* ordre, on trouve

$$\beta_0'' = \beta\left(1 - \frac{e}{r'}\frac{n - n'}{n'}\right),$$

$$b_1^0 = \frac{e\beta}{n'};$$

négligeons l'épaisseur et adoptons les valeurs numériques du précédent exemple : nous aurons, pour équation du rayon émergent,

$$y = \frac{\beta}{n}(x - M_1).$$

Pour $x - M_1 = r$, nous aurons

$$y = r\left(\frac{\beta}{n}\right).$$

La distance de l'image prise dans le plan focal à l'axe est rigoureusement proportionnelle à la tangente de l'angle d'incidence. Les tangentes croissant plus vite que les angles eux-mêmes, on voit pourquoi l'image d'un carré sera un quadrilatère curviligne à concavité tournée vers le centre.

La déformation est manifestement plus compliquée si le faisceau lumineux traverse successivement plusieurs lentilles séparées par des intervalles finis, le faisceau alors n'étant central que pour la première lentille.

100. Cas où les rayons incidents sur une surface réfringente partent tous d'un même point pris sur l'axe. Équations rigoureuses. — Si nous reprenons les équations (3) et désignons par ξ et ξ' les abscisses des points où le rayon incident et le rayon réfracté coupent l'axe, nous avons les relations

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{\beta}{n} = -\dfrac{b}{\xi - M}, & \dfrac{\beta'}{n'} = -\dfrac{b'}{\xi' - M'}, \\ b = \dfrac{\sin\theta}{\dfrac{1}{r} - \dfrac{1-\cos\theta}{\xi - M}}, & b' = \dfrac{\sin\theta}{\dfrac{1}{r} - \dfrac{1-\cos\theta}{\xi' - M}}, \\ \dfrac{n^2\left(\dfrac{\beta}{n}\cos\theta + \sin\theta\right)^2}{1 + \dfrac{\beta^2}{n^2}} = \dfrac{n'^2\left(\dfrac{\beta'}{n'}\cos\theta + \sin\theta\right)^2}{1 + \dfrac{\beta'^2}{n'^2}}. \end{cases}$$

Posant

$$(11)\qquad \xi - M = r - \delta, \qquad \xi' - M = r - \delta',$$

δ et δ' désignant la distance des points ξ et ξ' au centre de la sur-

face, on a

$$(12)\quad \begin{cases} b = \dfrac{r(r-\delta)\sin\theta}{r\cos\theta-\delta}, & b' = \dfrac{r(r-\delta')\sin\theta}{r\cos\theta-\delta'}, \\ \dfrac{\beta}{n} = -\dfrac{r\sin\theta}{r\cos\theta-\delta}, & \dfrac{\beta'}{n'} = -\dfrac{r\sin\theta}{r\cos\theta-\delta'}, \end{cases}$$

et la dernière équation (10) renversée devient

$$\frac{1}{n^2}\frac{\delta^2-2r\delta\cos\theta+r^2}{\delta^2} = \frac{1}{n'^2}\frac{\delta'^2-2r\delta'\cos\theta+r^2}{\delta'^2}$$

ou

$$(13)\quad \frac{1}{n^2}\left[\left(\frac{1}{\delta}\right)^2-2\frac{1}{r}\frac{1}{\delta}\cos\theta+\left(\frac{1}{r}\right)^2\right] = \frac{1}{n'^2}\left[\left(\frac{1}{\delta'}\right)^2-2\frac{1}{r}\frac{1}{\delta'}\cos\theta+\left(\frac{1}{r}\right)^2\right],$$

équation qu'il eût été aisé d'obtenir directement par une figure, si nous n'avions pas préféré obtenir en même temps les valeurs de β, β', b, b'.

101. Détermination approchée de ξ' en conservant les termes du troisième ordre. — Nous allons maintenant déduire de ces formules les valeurs de b', β', ξ' en négligeant les quantités d'un ordre supérieur au troisième.

Si nous négligeons d'abord θ, nous avons

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\delta}-\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{n'}\left(\frac{1}{\delta'}-\frac{1}{r}\right),$$

qui coïncide bien avec le résultat de la première approximation.

Si nous remplaçons dans l'équation (13) $\cos\theta$ par $1-z$, elle devient

$$(14)\quad \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{\delta}-\frac{1}{r}\right)^2+\frac{2z}{n^2r}\frac{1}{\delta} = \frac{1}{n'^2}\left(\frac{1}{\delta'}-\frac{1}{r}\right)^2+\frac{2z}{n'^2r}\frac{1}{\delta'}.$$

Différentiant cette équation en y faisant varier z et $\frac{1}{\delta'}$, nous avons

$$\frac{1}{n^2r}\frac{1}{\delta} = \frac{1}{n'^2r}\frac{1}{\delta'}+\frac{1}{n'^2}\left(\frac{1}{\delta'}-\frac{1}{r}\right)\frac{d\frac{1}{\delta'}}{dz}+\frac{z}{n'^2r}\frac{d\frac{1}{\delta'}}{dz};$$

d'où, faisant $z=0$,

$$(15)\quad \left(\frac{d\frac{1}{\delta'}}{dz}\right)_{z=0} = \frac{\frac{1}{r}\left(\frac{1}{n^2\delta}-\frac{1}{n'^2\delta'}\right)}{\frac{1}{n'^2}\left(\frac{1}{\delta'}-\frac{1}{r}\right)},$$

de sorte qu'en négligeant les termes du quatrième ordre par rapport à θ, on a

$$d\frac{1}{\delta'} = \frac{z}{r}\,\frac{\dfrac{1}{n^2\delta} - \dfrac{1}{n'^2\delta'}}{\dfrac{1}{n'^2}\left(\dfrac{1}{\delta'} - \dfrac{1}{r}\right)} = \frac{z}{r}\,\frac{n'-n}{nn'}\,\frac{\dfrac{n'}{\delta} + \dfrac{n}{r}}{\dfrac{1}{\delta} - \dfrac{1}{r}}.$$

Comme

$$\frac{1}{\delta'} = \frac{\dfrac{1}{r}\,\dfrac{1}{\xi' - M}}{\dfrac{1}{\xi' - M} - \dfrac{1}{r}}, \qquad \frac{1}{\delta} = \frac{\dfrac{1}{r}\,\dfrac{1}{\xi - M}}{\dfrac{1}{\xi - M} - \dfrac{1}{r}},$$

on a

$$(n'-n)\frac{n}{r} = \frac{nn'}{\xi' - M} - \frac{n^2}{\xi - M},$$

d'où

$$d\frac{1}{\delta'} = z\left(\frac{n'}{n}\,\frac{1}{\xi - M} - \frac{1}{\xi' - M}\right).$$

D'autre part,

$$d\frac{1}{\delta'} = -\frac{\dfrac{1}{r^2}\,d\,\dfrac{1}{\xi' - M}}{\left(\dfrac{1}{\xi' - M} - \dfrac{1}{r}\right)^2},$$

d'où

$$d\frac{1}{\xi' - M} = -r^2 z\left(\frac{n'}{n}\,\frac{1}{\xi - M} - \frac{1}{\xi' - M}\right)\left(\frac{1}{\xi' - M} - \frac{1}{r}\right)^2$$

$$= r^2 z\,\frac{\dfrac{n'}{n} - 1}{\dfrac{n'^3}{n^3}}\left[\frac{1}{r} - \left(1 + \frac{n'}{n}\right)\frac{1}{\xi - M}\right]\left(\frac{1}{\xi - M} - \frac{1}{r}\right)^2.$$

On peut introduire au lieu de z la demi-ouverture

$$x = r\sin\theta \qquad \text{ou} \qquad x^2 = 2r^2 z, \qquad r^2 z = \frac{1}{2}x^2.$$

Pour continuer, nous désignerons par λ et λ' les inverses de $\xi - M$ et $\xi' - M$, par ρ l'inverse de r et par m l'indice $\dfrac{n'}{n}$, de sorte que

$$d\lambda' = \frac{1}{2}x^2\,\frac{m-1}{m^3}[\rho - (m+1)\lambda](\lambda - \rho)^2.$$

102. Cas d'une lentille. — Envisageons maintenant deux surfaces réfringentes consécutives. Soient λ, λ', ρ les quantités ainsi désignées pour la première surface; μ, μ', ρ' les mêmes quantités pour la seconde.

μ' est une fonction de μ et de x', et l'on a visiblement

$$\lambda' x = \mu x'.$$

Il s'ensuit

$$d\mu' = \frac{\partial \mu'}{\partial \mu} d\mu + \frac{\partial \mu'}{\partial x'} dx'.$$

Or on a entre λ, λ', μ, μ' les relations suivantes

$$\lambda - \rho = m(\lambda' - \rho),$$

$$\mu - \rho' = \frac{1}{m}(\mu' - \rho'),$$

$$\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda'} = e,$$

e étant l'épaisseur de la lentille.

Il s'ensuit d'abord que

$$\frac{\partial \mu'}{\partial \mu} = m, \qquad d\lambda' = \varkappa x^2, \qquad d\mu = \frac{\mu^2}{\lambda'^2} \varkappa x^2;$$

donc

$$\frac{d\mu}{\mu^2} = \frac{d\lambda'}{\lambda'^2},$$

$$\frac{\partial \mu'}{\partial \mu} d\mu = m \varkappa \frac{\mu^2}{\lambda'^2} x^2.$$

Quant à $\frac{\partial \mu'}{\partial x'} dx'$, c'est la variation de μ' résultant de l'ouverture x' de la seconde surface ; elle est

$$\varkappa' x'^2 = \varkappa' \frac{\lambda'^2}{\mu^2} x^2;$$

donc

$$d\mu' = x^2 \left(m \varkappa \frac{\mu^2}{\lambda'^2} + \varkappa' \frac{\lambda'^2}{\mu^2} \right).$$

Il reste à remplacer $\varkappa$ et $\varkappa'$ par leurs valeurs

$$\varkappa = \frac{1}{2} \frac{m-1}{m^3} [\rho - (m+1)\lambda](\lambda - \rho)^2 = \frac{1}{2(1-m)^2} (\lambda' - \lambda)^2 (\lambda' - m\lambda),$$

$$\varkappa' = -\frac{1}{2} m^2 (m-1) \left(\rho' - \frac{m+1}{m} \mu \right) (\mu - \rho')^2 = -\frac{m}{2(1-m)^2} (\mu' - \mu)^2 (\mu - m\mu').$$

Or on a, par les formules ci-dessus,

$$(\mu')_0 = \lambda + (m-1)(\rho - \rho') - \frac{e}{m} [\lambda + (m-1)\rho]^2 ;$$

donc la valeur complète de μ' est

$$(16)\quad \mu' - (\mu')_0 = \frac{m}{2(m-1)^2} x^2 \left[\frac{\mu^2}{\lambda'^2} (\lambda' - \lambda)^2 (\lambda' - m\lambda) - \frac{\lambda'^2}{\mu^2} (\mu' - \mu)^2 (\mu - m\mu') \right].$$

Dans le dernier terme, on peut le plus souvent négliger l'épaisseur e de la lentille. Dans ce cas, $\lambda' = \mu$ et

$$\mu' = (\mu'_0) + \frac{m}{2(m-1)^2} x^2 [(\lambda' - \lambda)^2 (\lambda' - m\lambda) - (\mu' - \lambda')^2 (\lambda' - m\mu')].$$

On peut éliminer λ'; on a

$$\lambda' - \lambda = \frac{m-1}{m}(\rho - \lambda), \qquad \lambda' - m\lambda = \frac{m-1}{m}(\rho - \overline{m+1}\lambda),$$

$$\lambda' - \mu' = \frac{m-1}{m}(\rho' - \mu'), \qquad \lambda' - m\mu' = \frac{m-1}{m}(\rho' - \overline{m+1}\mu');$$

d'où

$$(17)\quad \mu' - (\mu'_0) = \frac{m-1}{2m^2} x^2 [(\rho - \lambda)^2 (\rho - \overline{m+1}\lambda) - (\rho' - \mu')^2 (\rho' - \overline{m+1}\mu')],$$

et la relation entre λ et μ' se réduit à

$$(18)\qquad \mu' - \lambda = (m-1)(\rho - \rho').$$

103. Cas où les rayons incidents sont parallèles à l'axe. — Si les rayons incidents sont parallèles, λ est nul, μ' est l'inverse de la distance focale principale a, et l'on a, en rétablissant les éléments géométriques,

$$\frac{1}{\xi' - M'} = \frac{1}{a} + \frac{m-1}{2m^2} \left[\frac{1}{r^3} - \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{a} \right)^2 \left(\frac{1}{r'} - \frac{m+1}{a} \right) \right] x^2,$$

où

$$\frac{1}{a} = (m-1)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right).$$

On en tire

$$(19)\quad \xi' - M' - a = +a^2 x^2 \frac{m-1}{2m^2} \left[\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{a} \right)^2 \left(\frac{1}{r'} - \frac{m+1}{a} \right) - \frac{1}{r^3} \right]$$

ou

$$(20)\quad \left\{ \begin{array}{l} \xi' - M' - a \\ = \dfrac{a^2 b_1^2}{2m^2 (m-1)^2} \left[(m-1)^3 \left(\dfrac{1}{r'} - \dfrac{1}{a} \right)^2 \left(\dfrac{1}{r'} - \dfrac{m+1}{a} \right) - \left(\dfrac{m-1}{r'} + \dfrac{1}{a} \right)^3 \right]. \end{array} \right.$$

104. Discussion de l'aberration longitudinale dans une lentille. — Il est important d'étudier comment varie cette expression, quand a reste constant et que r' varie.

La dérivée de la parenthèse par rapport à r' est

$$\frac{m(m-1)}{ar'^2}\left[\frac{2(m-1)(m+2)}{r'}-\frac{2m^2-m-4}{a}\right].$$

La valeur

$$r'=2a\frac{(m-1)(m+2)}{2m^2-m-4}$$

donne un maximum algébrique dont la valeur est négative : c'est donc un minimum en valeur absolue. Pour cette valeur de r', on a

$$(21)\qquad \begin{cases} r=2a\dfrac{(m-1)(m+2)}{m(2m+1)}, \\ r'=r\dfrac{m(2m+1)}{2m^2-m-4}. \end{cases}$$

Il y a lieu de remarquer que r' est infini pour

$$m=1,6861.$$

Pour les valeurs de m, moindres que ce nombre, ce qui arrive pour les crowns, r' et r sont de signes contraires : en particulier, pour $m=\frac{3}{2}$,

$$r'=-6r.$$

Pour les valeurs de m plus grandes, et c'est le cas des flints les plus lourds, r et r' sont de même signe; en particulier, pour $m=1,8$,

$$r'=\frac{207}{17}r.$$

La valeur de l'aberration minimum est

$$-\frac{m(4m-1)b^2}{8a(m-1)^2(m-2)}.$$

Pour $m=\frac{3}{2}$, c'est

$$-\frac{15}{14}\frac{b^2}{a}.$$

Pour $m=1,8$, c'est

$$-\frac{1395}{2432}\frac{b^2}{a}.$$

Si $a=4^{m}$ et $b=0,125$, le minimum pour $m=\frac{3}{2}$ est environ 4^{mm}.

105. **Cas de plusieurs lentilles.** — On voit assez comment on pourrait étudier la marche des rayons à travers plusieurs lentilles ; mais les calculs se compliquent, et sans qu'il soit possible d'obtenir de résultats simples.

Les conditions qui permettraient de supprimer l'aberration des rayons parallèles à l'axe ne sont pas les mêmes qui diminuent l'écart entre les plans focaux correspondant à des rayons diversement inclinés sur l'axe, ni que celles qui rétablissent la similitude entre un objet et son image.

Nous nous bornerons à remarquer que l'aberration longitudinale, qui correspond aux rayons marginaux, est proportionnelle au carré de l'ouverture de la lentille et par suite, si l'image et l'objet restent fixes, au carré de la déviation de ces rayons marginaux. Dans une lunette astronomique, un faisceau qui a traversé l'objectif en faisant avec l'axe l'angle maximum rencontre la lentille oculaire au bord de cette lentille oculaire, et, si l'on donne le grossissement, la direction du faisceau émergent et, par suite, la déviation totale sont données. Il s'ensuit qu'il y a intérêt à composer un oculaire au moyen de plusieurs lentilles. La déviation totale est alors répartie entre ces lentilles, et, cette déviation totale étant constante, la somme des aberrations successives sera considérablement diminuée.

106. **Étude des faisceaux qui se rencontrent dans les instruments d'optique.** — Les rayons de tout faisceau lumineux issu d'un point sont normaux à une surface ayant pour centre ce point. D'autre part, dans la théorie que nous avons esquissée, les rayons d'un même faisceau demeurent toujours voisins les uns des autres. Dans les numéros suivants, nous montrerons d'abord que, si des rayons lumineux sont normaux à une même surface, ils seront encore, après un nombre quelconque de réfractions ou de réflexions, normaux à une même surface, et nous étudierons la constitution d'un faisceau infiniment mince, de manière à obtenir quelques renseignements sur la nature des images.

107. **Définition des congruences et des complexes de droites.** — Si par chaque point x, y, z de l'espace on mène une droite, *cette droite dépend de trois paramètres,* et le système s'appelle *complexe de droites.*

Si, par chaque point d'une surface donnée, on mène une droite, *cette droite ne dépend que de deux paramètres,* et le système de ces droites a reçu le nom de *congruence de droites.*

Par chaque point de l'espace il ne passe, en général, qu'un nombre limité de droites d'une congruence, tandis qu'il passe une infinité de droites d'un complexe, lesquelles forment un cône dont on obtiendrait l'équation en éliminant les trois paramètres entre les deux équations d'une droite du complexe et les conditions obtenues en écrivant que cette droite passe par le point donné.

108. Conditions pour que les droites d'une congruence soient normales à une surface. — Envisageons une congruence de droites et une surface S qui ne soit pas formée par des droites de la congruence.

Soient x, y, z les coordonnées du point où une droite de la congruence rencontre la surface S; u, v, w les cosinus directeurs de cette droite.

Ces cosinus u, v, w sont des fonctions de x, y, z. Nous allons montrer que *la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une surface* Σ *à laquelle les droites de la congruence soient normales est que*

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz$$

soit une différentielle exacte pour tous les déplacements du point xyz sur la surface S.

Si, en effet, la surface Σ existe, soient X, Y, Z les coordonnées du point où la droite de la congruence lui est normale; on a, pour tout déplacement,

$$u\,d\mathrm{X} + v\,d\mathrm{Y} + w\,d\mathrm{Z} = 0. \tag{22}$$

Or, si ρ désigne la distance des points xyz, XYZ, on a

$$\mathrm{X} = x - u\rho, \qquad \mathrm{Y} = y - v\rho, \qquad \mathrm{Z} = z - w\rho; \tag{23}$$

ces valeurs portées dans l'équation (22) et en tenant compte de ce que

$$u\,du + v\,dv + w\,dw = 0,$$

donnent

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz = d\rho. \tag{24}$$

Le premier membre est donc bien une différentielle exacte.

Réciproquement, si ce premier membre est la différentielle d'une fonction ρ, le point XYZ défini par les équations (23) satisfera à l'équation (22), et la surface lieu de ce point sera normale à toutes les droites de la congruence.

109. Condition pour que les droites d'un complexe forment une congruence et soient normales à une surface. — La condition est que $u\,dx + v\,dy + w\,dz$ *soit une différentielle exacte pour tous les déplacements* dx, dy, dz *du point* xyz *dans l'espace.*

Il suffit de répéter littéralement ce qui a été dit au premier alinéa du numéro précédent pour montrer que, s'il existe une surface Σ normale à toutes les droites du complexe, $u\,dx + v\,dy + w\,dz$ est une différentielle exacte.

Réciproquement, si cette condition est satisfaite et que

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz = d\theta, \tag{25}$$

il en résulte que

$$u = \frac{\partial\theta}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial\theta}{\partial y}, \qquad w = \frac{\partial\theta}{\partial z}; \tag{26}$$

d'où, à cause de la relation entre les trois cosinus,

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)^2 = 1. \tag{27}$$

Or, si l'on envisage la surface définie par l'équation

$$\theta = m, \tag{28}$$

m désignant une constante, et qu'on lui mène un plan tangent (28) perpendiculaire à une droite dont les cosinus directeurs soient λ, μ, ν, ces trois cosinus sont proportionnels à

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}, \quad \frac{\partial\theta}{\partial y}, \quad \frac{\partial\theta}{\partial z}.$$

Si l'on fait varier m, en laissant fixe λ, μ, ν, on voit que, au point de contact xyz du plan tangent avec la surface (28), $\frac{\partial\theta}{\partial x}$, $\frac{\partial\theta}{\partial y}$ $\frac{\partial\theta}{\partial z}$ ne dépendent que de $\lambda\mu\nu$ et pas de m. On a donc

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = \text{const.}, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial y} = \text{const.}, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial z} = \text{const.} \tag{29}$$

Mais la troisième équation rentre dans les premières à cause de la relation (27). Il s'ensuit que le point de contact en question décrit, quand on fait varier m, une ligne définie par les équations

$$(30) \qquad u = \frac{\partial\theta}{\partial x} = \text{const.}, \qquad v = \frac{\partial\theta}{\partial y} = \text{const.},$$

Cette ligne est normale aux surfaces (28), aux points de contact en question

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial\theta}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial\theta}{\partial z}\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial z}$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)^2\right] = 0,$$

de sorte que le plan tangent au point xyz à la surface $u = \text{const.}$ est perpendiculaire au plan tangent à la surface $\theta = m$, et il en est de même du plan tangent à la surface $v = \text{const.}$

Les lignes (30) sont nécessairement des droites, puisque les tangentes en leurs points successifs étant perpendiculaires à des plans parallèles ont même direction. Il s'ensuit que *les surfaces* (28) *sont des surfaces parallèles*. En outre, la droite menée par le point xyz et dont les cosinus directeurs sont u, v, w est normale à celle de ces surfaces qui passe en ce point xyz; le complexe donné est donc une congruence de droites normales à toutes les surfaces $\theta = m$.

110. Théorème de Malus. — *Si des rayons sont normaux à une surface, ils conservent cette propriété après un nombre quelconque de réflexions et de réfractions.*

Il suffit évidemment de prouver le théorème pour une seule réfraction, une réflexion pouvant être assimilée à une réfraction d'indice -1.

Si l'on porte, à partir du point d'incidence, sur le rayon incident (*fig* 16), une longueur $MA = 1$, sur le rayon réfracté une longueur MB égale à l'indice n, et que l'on compose ces longueurs comme on composerait des vitesses, la résultante est normale à la surface de séparation des deux milieux; car, dans le triangle AMC, on a

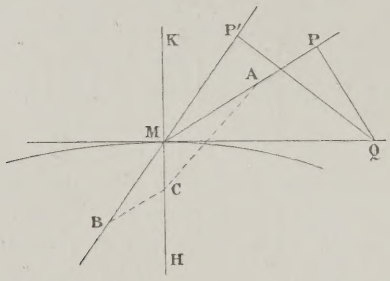
$$\frac{\sin AMC}{\sin MCA} = \frac{n}{1},$$

d'où

$$\frac{\sin AMC}{\sin BMC} = n,$$

de sorte que la droite MC partage l'angle AMB en deux parties dont les sinus sont dans le même rapport que si MC était la normale en M à la surface; elle coïncide donc avec cette normale.

Fig. 16.



Si l'on désigne par λ la longueur MC, par α, β, γ; u, v, w; u', v', w' les cosinus directeurs de MC, de MA, de MB, on a, en écrivant que la projection de MC sur un des axes de coordonnées est la somme des projections de MA et MB,

$$(31)\qquad \begin{cases} nu' + u = \lambda\alpha, \\ nv' + v = \lambda\beta, \\ nw' + w = \lambda\gamma. \end{cases}$$

Pour tout déplacement dx, dy, dz du point $M(xyz)$, sur la surface, on a

$$(32)\qquad \alpha\,dx + \beta\,dy + \gamma\,dz = 0.$$

L'élimination de α, β, γ entre les équations (31) et (32) donne

$$(33)\qquad u(u'\,dx + v'\,dy + w'\,dz) = -(u\,dx + v\,dy + w\,dz).$$

Dire que les rayons incidents sont normaux à une surface Σ, c'est dire que le second membre (§ 108) est la différentielle d'une fonction ρ qui est la distance du point M au point P où le rayon coupe la surface Σ. Donc $u'\,dx + v'\,dy + w'\,dz$ est la différen-

tielle de $-d\left(\frac{\rho}{n}\right)$. Les rayons réfractés sont donc aussi normaux à une même surface Σ'.

Si l'on porte sur le rayon incident une longueur MP égale à ρ et qu'on mène PQ perpendiculaire à MP, PQ sera la trace sur la figure du plan tangent à la surface Σ en P. Si l'on abaisse QP′ perpendiculaire au rayon réfracté, on aura

$$MP' = MQ \sin BMH = MP \frac{\sin BMH}{\sin KMP} = \frac{MP}{n}.$$

Donc, en tenant compte du signe,

$$MP' = -\frac{\rho}{n};$$

P′Q est donc la trace sur le plan de la figure du plan tangent au point P′ à la surface Σ'. Ces deux plans tangents se coupent donc suivant une droite située dans le plan tangent en M à la surface de séparation des deux milieux.

111. **Représentation d'un faisceau infiniment mince ou pinceau.** — Nous considérerons une congruence composée de rayons peu inclinés les uns sur les autres, et nous limiterons les droites du faisceau de telle manière que tous les points utilisés soient très voisins de l'un des rayons qui sera pour nous l'axe du faisceau. Un tel faisceau s'appellera *un pinceau*.

Prenons l'axe du faisceau pour axe des z et des axes des x et des y perpendiculaires entre eux et à l'axe des z. Un rayon du faisceau coupera le plan des xy en un point dont nous désignerons les coordonnées par x, y, o et aura une direction voisine de l'axe des z, de sorte que ses cosinus directeurs pourront être représentés par α, β, 1.

Comme il ne passe qu'un rayon par le point x, y, o, on peut regarder x et y comme des fonctions de α et β, et comme r et s s'annulent avec α et β, et que nous négligeons les puissances de α et β supérieures à la première, on a, par le théorème de Maclaurin

$$x = \frac{\partial x}{\partial \alpha}\alpha + \frac{\partial x}{\partial \beta}\beta, \qquad y = \frac{\partial y}{\partial \alpha}\alpha + \frac{\partial y}{\partial \beta}\beta$$

ou

$$\begin{cases} x = a\alpha + b\beta, \\ y = a'\alpha + b'\beta, \end{cases} \tag{34}$$

a, b, a', b' étant des constantes, et les équations du rayon sont

$$\frac{\xi - x}{\alpha} = \frac{\eta - y}{\beta} = \zeta. \tag{35}$$

112. Distance minimum d'un rayon à l'axe du pinceau. — Soit z le rayon de cette plus courte distance; c'est la valeur de ζ qui rend minimum

$$(x + \alpha\zeta)^2 + (y + \beta\zeta)^2.$$

Donc

$$(x + \alpha z)\alpha + (y + \beta z)\beta = 0,$$

d'où

$$z(\alpha^2 + \beta^2) = -[a\alpha^2 + (b + a')\alpha\beta + b'\beta^2]. \tag{36}$$

Si l'on désigne par φ l'angle que fait avec le plan des zx un plan mené par l'axe du faisceau et parallèle au rayon $(\alpha\beta\gamma)$, l'équation de ce plan étant

$$\frac{\xi}{\alpha} = \frac{\eta}{\beta}, \tag{37}$$

on a

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\beta}{\alpha}, \tag{38}$$

d'où

$$z = -[a\cos^2\varphi + (b + a')\sin\varphi\cos\varphi + b'\sin^2\varphi]. \tag{39}$$

Il est manifeste que cette valeur de z est comprise entre deux limites correspondant à deux valeurs rectangulaires de φ données par l'équation

$$(b' - a)\sin 2\varphi + (b + a')\cos 2\varphi = 0.$$

Si l'on pose

$$\begin{cases} b' - a = k\cos 2\omega, \\ b + a' = k\sin 2\omega, \end{cases} \tag{40}$$

cette équation devient

$$\sin(2\varphi + 2\omega) = 0,$$

d'où

$$\varphi = -\omega, \qquad \varphi = \frac{\pi}{2} - \omega,$$

et, comme l'équation (39) s'écrit

$$(39^\star) \qquad z = -\left(\frac{a+b'}{2} + \frac{a-b'}{2}\cos 2\varphi + \frac{b+a'}{2}\sin 2\varphi\right),$$

les valeurs limites de z sont

$$(40) \quad \begin{cases} z_1 = -\left[\dfrac{a+b'}{2} - \dfrac{(a-b')^2}{2k} - \dfrac{(b+a')^2}{2k}\right] = -\dfrac{1}{2}(a+b'-k), \\ z_2 = -\left[\dfrac{a+b'}{2} + \dfrac{(a-b')^2}{2k} + \dfrac{(b+a')^2}{2k}\right] = -\dfrac{1}{2}(a+b'-k), \end{cases}$$

et l'équation (39*) s'écrit

$$(39^{\star\star}) \qquad z = z_1 \sin^2(\omega+\varphi) + z_2 \cos^2(\omega+\varphi).$$

Les points de l'axe correspondant à z_1 et z_2 s'appellent *points limites du faisceau,* et les plans menés par cet axe parallèlement aux rayons correspondants s'appellent *plans principaux*. Ils sont rectangulaires.

Si le faisceau est symétrique par rapport au plan des zx, c'est-à-dire si au rayon $x, y, \alpha, \beta, \gamma$ correspond le rayon $x, -y, \alpha, -\beta, \gamma$, les coefficients b et a' sont nuls; alors ω est nul; les plans des zx et des zy sont les plans principaux du rayon Oz, et l'on a

$$k = b' - a, \qquad z_1 = a, \qquad z_2 = b'.$$

112. Plans focaux, foyers de l'axe du pinceau. — Cherchons si le rayon $\alpha\beta\gamma$ et l'axe du pinceau peuvent être dans un même plan, c'est-à-dire si le plan défini par l'équation (37) peut contenir le point $(x, y, 0)$. Cela nous donne la condition

$$\frac{a\alpha + b\beta}{\alpha} = \frac{a'\alpha + b'\beta}{\beta},$$

qui s'écrit

$$a'\cos^2\varphi + (b'-a)\sin\varphi\cos\varphi - b\sin^2\varphi = 0$$

ou

$$(a'-b) + (a'+b)\cos 2\varphi + (b'-a)\sin 2\varphi = 0$$

ou encore

$$(41) \qquad \sin(2\varphi + 2\omega) = \frac{b-a'}{k}.$$

Si l'on désigne par $2\omega'$ un angle compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ et dont le sinus soit $\frac{b-a'}{k}$, on obtient

$$\varphi' = -\omega + \omega', \qquad \varphi'' = \frac{\pi}{2} - \omega - \omega'. \tag{42}$$

Il y a donc deux rayons satisfaisant à la condition énoncée; les plans correspondants ont mêmes plans bissecteurs que les plans principaux; les points où ces rayons coupent l'axe du pinceau sont déterminés par la formule (39), qui donne

$$z' = z_1 \sin^2\omega' + z_2 \cos^2\omega',$$
$$z'' = z_1 \cos^2\omega' + z_2 \sin^2\omega';$$

d'où

$$z' + z'' = z_1 + z_2 = -(a + b').$$

Les deux foyers sont donc symétriquement placés par rapport aux points limites.

On trouve d'ailleurs

$$z'z'' = ab' - ba'.$$

On peut trouver plus rapidement ces résultats en remarquant que, si le rayon (35) coupe l'axe du pinceau, on a, pour la valeur de z correspondante,

$$x + \alpha z = 0, \qquad y + \beta z = 0$$

ou

$$(z + a)\alpha + b\beta = 0, \qquad a'\alpha + (b' + z)\beta = 0,$$

d'où

$$(a + z)(b' + z) - ba' = 0. \tag{43}$$

113. Lignes focales. — Cherchons l'intersection d'un rayon avec le plan $z = z'$.

Les équations (35) donnent immédiatement

$$\xi = x + \alpha z', \qquad \eta = y + \beta z'.$$

Le plan mené par ce point et par l'axe des z a pour équations

$$\frac{\xi}{x + \alpha z'} = \frac{\eta}{y + \beta z'}.$$

D'après l'équation (43), le rapport

$$\frac{y + \beta z'}{x + \alpha z'} \quad \text{ou} \quad \frac{a'\alpha + (b' + z')\beta}{(a + z')\alpha + b\beta}$$

est indépendant de α, β. *Donc tous les rayons coupent le plan* $z = z'$ *suivant une droite qui passe par le premier foyer.* On l'appelle *première ligne focale.*

De même, *tous les rayons coupent le plan* $z = z''$ *suivant une droite qui passe par le second foyer* et que l'on nomme *seconde ligne focale.*

Le second plan focal contient deux rayons qui se coupent au second foyer et qui s'appuient sur la première ligne focale : donc *la première ligne focale est dans le second plan focal,* et de même *la deuxième ligne focale est dans le premier.*

114. Cas où les rayons du pinceau sont normaux à une surface. — D'après le n° **107**, cela a lieu si

$$\alpha\, dx + \beta\, dy$$

est une différentielle exacte, ou si, regardant α et β comme fonctions de x et y,

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{\partial \beta}{\partial x}. \tag{44}$$

Jusqu'ici nous avons regardé x et y comme fonctions de α et β. Soient

$$x = \varphi(\alpha, \beta), \qquad y = \psi(\alpha, \beta) \tag{45}$$

les équations (34). En regardant α et β comme des fonctions de x et y définies par ces équations (45) et les différentiant par rapport à x et y, on obtient

$$1 = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial x}, \qquad 0 = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial y},$$

$$0 = \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial x}, \qquad 1 = \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial y}.$$

En posant

$$\frac{D(xy)}{D(\alpha\beta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial \beta} \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial \psi}{\partial \beta} \end{vmatrix},$$

nous avons, par les deux premières équations,

$$\frac{D(xy)}{D(\alpha\beta)}\frac{\partial \beta}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}$$

et, par les deux autres,

$$\frac{D(xy)}{D(\alpha\beta)}\frac{\partial\alpha}{\partial y} = -\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}.$$

Substituant dans la condition (44) et remplaçant φ par x, ψ par y, nous trouvons

$$\frac{\partial y}{\partial\alpha} = \frac{\partial x}{\partial\beta}$$

ou

$$a' = b. \tag{46}$$

Les équations (41), (42) donnent alors

$$\omega' = 0, \qquad \varphi' = -\omega, \qquad \varphi'' = -\omega + \frac{\pi}{2}.$$

Donc, si les rayons d'un pinceau sont normaux à une surface, les plans focaux et, par suite, les lignes focales sont rectangulaires.

115. **Cas où le pinceau admet deux plans de symétrie rectangulaires.** — Les relations (35) étant linéaires et homogènes en x, y, α, β, il s'ensuit que, si elles sont satisfaites par un rayon (x, y, α, β), elles le sont aussi par le rayon $(-x, -y, -\alpha, -\beta)$ symétrique du premier par rapport à l'axe du pinceau. Si le pinceau admet un plan de symétrie, il en aura deux rectangulaires. Supposons que ce soient les plans zx, zy. On voit de suite que l'on aura

$$b = a' = 0.$$

L'équation (46) est vérifiée, et les rayons sont normaux à une même surface; on a

$$\omega = 0, \qquad k = b' - a, \qquad z_1 = -a, \qquad z_2 = -b',$$
$$\omega' = 0, \qquad z' = z_2, \qquad z'' = z_1.$$

Les plans principaux et les plans focaux se confondent avec les plans de symétrie, les foyers avec les points limites.

116. **Limite d'une section perpendiculaire à l'axe. Cercle de confusion minimum.** — Supposons que le pinceau formé de rayons normaux à une surface admette deux plans de symétrie, choisis pour plans des zx et des zy, et que ce pinceau soit limité par une surface coupant le plan des xy suivant une petite ellipse définie

par l'équation

$$\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1.$$

Les équations (34) donnent

$$\alpha = \frac{x}{a}, \qquad \beta = \frac{y}{b'}.$$

Les équations (35) d'un rayon limite deviennent

$$\xi = x\left(1 + \frac{\zeta}{a}\right), \qquad \eta = y\left(1 + \frac{\zeta}{b'}\right);$$

ce rayon coupe donc le plan $\zeta = z$ suivant une ellipse dont l'équation est

$$\frac{\xi^2}{m^2\left(1 + \frac{z}{a}\right)^2} + \frac{\eta^2}{n^2\left(1 + \frac{z}{b'}\right)^2} = 1.$$

Cette ellipse est un cercle si

$$m\left(1 + \frac{z}{a}\right) = \pm n\left(1 + \frac{z}{b'}\right),$$

d'où

$$\frac{m \mp n}{z} = \pm \frac{n}{b'} - \frac{m}{a}.$$

La seconde solution donnant

$$\frac{m + n}{z} = \frac{m}{z_1} + \frac{n}{z_2},$$

le z correspondant est compris entre z_1 et z_2, c'est-à-dire entre les deux foyers.

Le rayon du cercle est

$$m\left(1 + \frac{z}{a}\right),$$

ce qui donne

$$\frac{z_1 - z_2}{r} = \frac{z_1}{m} + \frac{z_2}{n}.$$

C'est ce cercle que l'on adopte comme image du point lumineux origine du pinceau. Il est manifeste que cette image sera satisfaisante surtout si z_1 est très voisin de z_2, c'est-à-dire si les deux lignes focales sont très voisines l'une de l'autre.

117. Emploi de la fonction caractéristique dans la théorie des instruments. — Si dans l'équation (33) nous remplaçons par $\frac{n'}{n}$ l'indice, conformément à ce qui a été fait dans l'exposé de la théorie de Gauss, elle devient

$$n'(u'\,dx + v'\,dy + w'\,dz) + n(u\,dx + v\,dy + w\,dz) = 0.$$

Si nous posons

$$(47)\qquad \begin{cases} V = \int n\,(u\,dx + v\,dy + w\,dz), \\ V' = \int n'(u'\,dx + v'\,dy + w'\,dz), \end{cases}$$

nous aurons

$$(48)\qquad V + V' = \text{const.}$$

Hamilton a donné à la fonction V le nom de fonction caractéristique. Les deux surfaces

$$V = h, \qquad V' = k$$

sont respectivement normales, l'une aux rayons incidents, l'autre aux rayons réfractés; n et n' étant les inverses des vitesses de la lumière dans les deux milieux, l'équation (48) exprime que tous les rayons mettent le même temps à aller d'une surface à l'autre, et, quand on aura obtenu, indépendamment, par l'intégration, les deux fonctions V et V', en regardant x et y comme un point d'un rayon de chacun des deux faisceaux, la relation (48) aura lieu pour tout point de la surface de séparation des deux milieux.

118. Fonction caractéristique relative à un pinceau de rayons normaux à une surface. *a.* Cas ou l'axe du pinceau coincide avec l'axe des z. — Si nous supposons d'abord que l'axe du pinceau soit choisi comme axe des z, que les lignes focales, rectangulaires dans le cas dont il s'agit, soient l'une dans le plan des zx, et l'autre dans le plan des zy, et qu'elles aient pour équations, l'une

$$\eta = 0, \qquad \zeta = b,$$

l'autre

$$\xi = 0, \qquad \zeta = a,$$

enfin qu'un rayon du pinceau soit déterminé par sa direction α, β, 1 et par un point (x, y, z) situé dans une surface tangente à l'origine

au plan des xy, les équations de ce rayon étant

$$\frac{\xi - x}{\alpha} = \frac{\eta - y}{\beta} = \frac{\zeta - z}{\gamma},$$

nous obtenons, en écrivant que ce rayon rencontre les deux lignes focales et négligeant z qui est une petite quantité de second ordre, les deux conditions

$$\frac{y}{\beta} = -\frac{b}{\gamma}, \qquad -\frac{x}{\alpha} = \frac{a}{\gamma},$$

qui déterminent α et β.

On a ainsi

$$dV = n(\alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz) = n\gamma\left(dz - \frac{x\, dx}{a} - \frac{y\, dy}{b}\right),$$

d'où

$$V = K + n\left(z - \frac{x^2}{2a} - \frac{y^2}{2b}\right). \tag{49}$$

Si l'on fait tourner autour de Oz les axes de coordonnées d'un angle φ, de Ox vers Oy,

$$\begin{cases} V = K + n\left[z - \dfrac{(x'\cos\varphi - y'\sin\varphi)^2}{2a} - \dfrac{(x'\sin\varphi + y'\cos\varphi)^2}{2b}\right] \\ \quad = K + n\left(z' - \dfrac{x'^2}{2A} - \dfrac{y'^2}{2B} - \dfrac{2x'y'}{2C}\right), \end{cases} \tag{50}$$

en posant

$$\begin{cases} \dfrac{1}{A} = \dfrac{\cos^2\varphi}{a} + \dfrac{\sin^2\varphi}{b}, \\ \dfrac{1}{B} = \dfrac{\sin^2\varphi}{a} + \dfrac{\cos^2\varphi}{b}, \\ \dfrac{1}{C} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{a}\right)\sin 2\varphi, \end{cases} \tag{51}$$

et, réciproquement, si la fonction caractéristique est donnée sous la forme (50), les équations (51) détermineront $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ et φ.

On a, à cet effet,

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{A} + \frac{1}{B},$$

$$\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)\cos 2\varphi = \frac{1}{B} - \frac{1}{A},$$

$$\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)\sin 2\varphi = \frac{2}{C},$$

d'où successivement

$$\operatorname{tang} 2\varphi, \quad \frac{1}{b} - \frac{1}{a}, \quad \frac{1}{b} + \frac{1}{a}.$$

b. Cas ou l'axe du pinceau est dans le plan des zx. — Pour la théorie des instruments, il est indispensable de donner à l'axe du pinceau une direction quelconque dans le plan des zx. Pour obtenir les formules nécessaires, il suffira de partir de l'équation (50) et de faire tourner les axes d'un angle θ autour de l'axe des y. On a alors

$$V = K + n\left[x''\sin\theta + z''\cos\theta - \frac{(x''\cos\theta - z''\sin\theta)^2}{2A} - \frac{y''^2}{2B} - \frac{2y''(x''\cos\theta - z''\sin\theta)}{2C}\right].$$

119. Relation entre les constantes de deux pinceaux, l'un incident sur une surface, l'autre réfracté. — Supposons que l'axe du pinceau soit dans le plan des zx, que l'axe des z soit la normale à l'origine à la surface réfringente. Alors θ est l'angle d'incidence de l'axe du pinceau. L'équation de la surface réfringente dans le voisinage de l'origine est

$$z = \frac{x^2}{2P} + \frac{y^2}{2Q} + \frac{2xy}{2R} + \dots.$$

Si l'on admet que x, y, z est un point de cette surface, d'après l'équation (48), on aura, en remplaçant x'', y'' par x et y et z'' par zéro parce qu'il est du second ordre,

$$K + n\left[x\sin\theta + \left(\frac{x^2}{2P} + \frac{y^2}{2Q} + \frac{2xy}{2R}\right)\cos\theta - \frac{x^2\cos^2\theta}{2A} - \frac{y^2}{2B} - \frac{2xy\cos\theta}{2C}\right]$$
$$+ K' + n'\left[x\sin\theta' + \left(\frac{x^2}{2P} + \frac{y^2}{2Q} + \frac{2xy}{2R}\right)\cos\theta' - \frac{x^2\cos^2\theta'}{2A'} - \frac{y^2}{2B'} - \frac{2xy\cos\theta'}{2C'}\right] = \text{const.}$$

On en conclut

$$n\sin\theta + n'\sin\theta' = 0,$$

ce qui est la loi de la réfraction, et les équations

$$(52)\qquad \begin{cases} \dfrac{n\cos\theta + n'\cos\theta'}{\mathrm{P}} = \dfrac{n\cos^2\theta}{\mathrm{A}} + \dfrac{n'\cos^2\theta'}{\mathrm{A}'}, \\ \dfrac{n\cos\theta + n'\cos\theta'}{\mathrm{Q}} = \dfrac{n}{\mathrm{B}} + \dfrac{n'}{\mathrm{B}'}, \\ \dfrac{n\cos\theta + n'\cos\theta'}{\mathrm{R}} = \dfrac{n\cos\theta}{\mathrm{C}} + \dfrac{n'\cos\theta'}{\mathrm{C}'}. \end{cases}$$

qui déterminent A′, B′, C′.

Il est aisé de tirer de ces conditions des conséquences simples relatives aux cas où, $\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}$ étant nul, c'est-à-dire le plan d'incidence étant une section principale de la surface réfringente, *les lignes focales du pinceau incident sont l'une dans ce plan, l'autre perpendiculaire :* les *focales du pinceau réfracté jouissent alors des mêmes propriétés.*

120. Lignes focales d'un pinceau réfracté par un prisme. — Nous nous bornerons à appliquer ces considérations générales au cas du prisme en supposant l'axe du pinceau incident perpendiculaire à l'arête. Si on envisage d'abord la réfraction sur la première face prise pour plan des xy, $\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{P}}$, $\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{Q}}$, $\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{R}}$ étant nuls, on a

$$(53)\qquad \begin{cases} \dfrac{n\cos^2\theta}{\mathrm{A}} + \dfrac{n'\cos^2\theta'}{\mathrm{A}'} = 0, \\ \dfrac{n}{\mathrm{B}} + \dfrac{n'}{\mathrm{B}'} = 0, \\ \dfrac{n\cos\theta}{\mathrm{C}} + \dfrac{n'\cos\theta'}{\mathrm{C}'} = 0. \end{cases}$$

Si l'on néglige l'épaisseur du prisme, ce que l'on peut faire pourvu que le pinceau le rencontre assez près de l'arête, la fonction caractéristique du second pinceau étant

$$\mathrm{V} = \mathrm{K}' + n'\left(z - \frac{x^2}{2\mathrm{A}'} - \frac{y^2}{2\mathrm{B}'} - \frac{2xy}{2\mathrm{C}'}\right),$$

celle du pinceau émergent sera

$$\mathrm{V} = \mathrm{K}'' + n\left(z - \frac{x^2}{2\mathrm{A}''} - \frac{y^2}{2\mathrm{B}''} - \frac{2xy}{2\mathrm{C}''}\right),$$

et l'on aura, en représentant par θ'' et θ''' les angles d'incidence et

de réfraction sur la deuxième face,

$$(54)\qquad \begin{cases} \dfrac{n'\cos^2\theta''}{A'} + \dfrac{n\cos^2\theta'''}{A''} = 0, \\ \dfrac{n'}{B'} + \dfrac{n}{B''} = 0, \\ \dfrac{n'\cos\theta''}{C'} + \dfrac{n\cos\theta'''}{C''} = 0. \end{cases}$$

En éliminant A', B', C' entre les équations (53) et (54), on a celles qui déterminent les circonstances du faisceau émergent.

Si $\frac{1}{C}$ est nul, et que $A = B$, les rayons du pinceau incident passent par un même point; on a

$$\frac{1}{C'} = 0,$$

d'où

$$\frac{1}{C''} = 0.$$

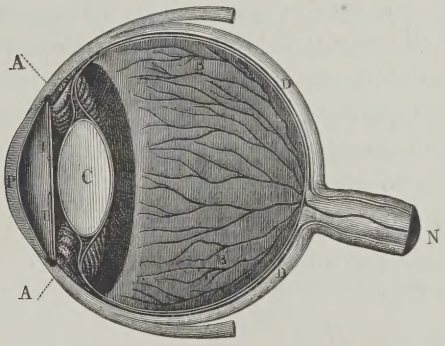
Si en même temps $\theta' = \theta''$, $\theta''' = \theta$, alors $A'' = A$ et $B'' = B$: donc $A'' = B''$ et le pinceau émergent est formé de rayons passant par un même point. C'est le cas où l'axe du pinceau traverse le prisme sous l'angle qui correspond à la déviation minimum. L'image (virtuelle) d'un point est alors un point, et c'est la raison pour laquelle on emploie ordinairement le prisme sous l'angle de déviation minimum.

CHAPITRE VI.

VISION. — NATURE ET CLARTÉ DES IMAGES AU FOYER D'UN INSTRUMENT D'OPTIQUE. LOUPE. LUNETTE ASTRONOMIQUE. OCULAIRES. MICROSCOPE. TÉLESCOPE A MIROIRS.

122. Description sommaire de l'œil. — L'œil se compose d'une série de milieux transparents placés l'un à la suite de l'autre, et renfermés dans une enveloppe DPD (*fig.* 17) nommée *sclérotique,* opaque sauf dans sa partie antérieure P qui a reçu le nom de *cornée transparente*. La *sclérotique* est à peu près de révolution autour d'un axe horizontal allant de la partie antérieure à la partie postérieure. Elle est tapissée par une membrane mince, la *choroïde* qui, en avant, se sépare de la *sclérotique* et forme les *procès ciliaires* AA qui maintiennent une lentille transparente C, le *cristallin,* lequel est recouvert en avant par *l'iris* I, un second repli de la *choroïde* qui est percé en son milieu d'une ouverture circulaire, *la pupille*. Le globe de l'œil est ainsi séparé par l'iris et le cristallin en deux cavités distinctes, une chambre antérieure remplie d'un liquide dit *humeur aqueuse* et une chambre postérieure remplie d'une masse gélatineuse, *l'humeur vitrée*.

Fig. 17.



La sclérotique est percée en arrière d'une ouverture par laquelle passe le nerf optique N, dont l'épanouissement, la *rétine,* tapisse le fond de l'œil et où passent aussi une partie des vaisseaux destinés à nourrir l'œil.

L'ensemble des milieux de l'œil forme un système convergent; la vision d'objets extérieurs est nette si leur image vient se former sur la rétine. Cependant la netteté de la vision n'est pas la même sur toutes les parties de la rétine. Le maximum de netteté a lieu lorsque les images se forment sur une région spéciale, la *tache jaune* d'environ 2^{mm} de diamètre, et spécialement sur une petite cavité de cette tache dite *fovea centralis* (cavité centrale). Près de la tache jaune se trouve le point où le nerf optique s'épanouit pour former la rétine, le *punctum cœcum.* C'est le seul point de la rétine qui ne soit pas sensible aux rayons lumineux.

123. **Valeurs numériques des éléments optiques de l'œil.** — La constitution de l'œil, en tant qu'instrument d'optique, est donnée par les nombres suivants.

La cornée transparente a ses deux faces sensiblement parallèles et ne produit aucune déviation des rayons incidents.

Les rayons de courbure sont approximativement :

	mm
Face antérieure de la cornée	8
Face antérieure du cristallin	10
Face postérieure du cristallin	6

Les distances sont :

	mm
De la face antérieure de la cornée à celle du cristallin	4
Épaisseur du cristallin	4
De la face postérieure du cristallin à la rétine	13

Les indices de réfraction par rapport à l'air sont :

Humeur aqueuse	1,34
Cristallin	1,45
Humeur vitrée	1,34

De sorte que les indices de l'humeur aqueuse et de l'humeur vitrée diffèrent peu de l'indice de l'eau, tandis que le cristallin, qui d'ailleurs n'est pas homogène, a un indice un peu plus grand.

L'application des formules données dans le premier paragraphe

du Chapitre III montre que les points principaux sont situés dans la chambre antérieure à $0^{mm},4$ l'un de l'autre; les points nodaux, séparés par la même distance, sont près de la face postérieure du cristallin. A cause de la faible distance qui sépare ces points nodaux, on peut les regarder comme confondus. L'axe optique de l'œil joint le second de ces points à la *fovea centralis;* c'est la direction de la vision attentive.

Le champ correspondant à la vision attentive est très petit, tandis que le champ de la vision générale s'étend à 90° autour de l'axe principal.

Les longueurs focales ont sensiblement, la première 15^{mm}, la seconde 20^{mm}, et la distance d'un point principal au point nodal correspondant est de 5^{mm}.

124. Vision. Œil normal, myope, hypermétrope. Presbytie. — L'œil étant en repos, la rétine est, *à l'ordinaire, dans le plan focal principal,* de sorte *qu'elle reçoit une image nette d'objets infiniment éloignés.* C'est en raison de cette circonstance que les lunettes astronomiques sont disposées, normalement, de telle manière que des rayons incidents parallèles émergent aussi en un faisceau de rayons parallèles. Cependant certains muscles de l'œil, agissant notamment sur le cristallin, lui permettent de former sur la rétine des images nettes d'objets situés à toute distance supérieure à un certain minimum *m*. Ce minimum est ordinairement de 20^{cm} à 30^{cm}. Quand il dépasse notablement cette longueur, on dit que l'œil est *presbyte*.

Certains yeux, dit *myopes,* ont, à l'état de repos, le plan *focal principal en avant de la rétine.* Ils ne donnent alors, sur la rétine, d'*images nettes que pour des points situés en deçà d'une certaine limite* M. L'accommodation permet en général à ces yeux d'abaisser la distance minimum de la vision distincte au-dessous de la limite *m* relative à un œil normal.

D'autres yeux ont toujours, à l'état de repos, *le plan focal principal en arrière de la rétine.* Ces yeux ne peuvent donner sur la rétine une image nette d'un point que si le faisceau de rayons issu de ce point a été, avant de pénétrer dans l'œil, transformé par un instrument d'optique en faisceau convergent. De tels yeux sont dits *hypermétropes.*

125. **Acuité visuelle.** — L'œil ne peut voir un objet que si l'image de cet objet sur la rétine a une étendue suffisante, et il ne distingue deux objets voisins que si leurs images sont suffisamment écartées. L'observation prouve que l'angle apparent de deux objets très petits doit être environ une minute pour que l'œil les distingue. A une distance de un mètre, cet angle correspond à une distance d'environ un tiers de millimètre.

126. **Nature des images au foyer d'un instrument d'optique.** — La propagation de la lumière ne se fait pas, en vérité, par rayons rectilignes, mais par ondes successives. Seulement le mouvement vibratoire qui se produit en un point B de la normale AB menée en un point A d'une de ces ondes S provient surtout de la partie de l'onde S la plus voisine du point A, et c'est cette circonstance qui produit l'apparence d'une propagation rectiligne. Si l'on considère des rayons issus d'un point et traversant un instrument d'optique, ils viennent, après réfraction, concourir en un point F que l'on peut appeler *le foyer conjugué du premier*. L'onde finale est donc sphérique. Une partie étroite de cette onde finale, limitée par le périmètre même des lentilles, est seule utilisée. Si dans le plan mené par F perpendiculairement à l'axe, plan que l'on peut appeler *plan focal*, on considère un point voisin de F, il reçoit, des bords extrêmes de la zone utilisée de l'onde, des mouvements vibratoires qui ont, pour y arriver, parcouru des chemins inégaux, et il est manifeste que si la différence de ces chemins est une demi-longueur d'onde, ces mouvements vibratoires (supposés périodiques et symétriques), étant égaux et de signes contraires, se détruiront. C'est par ces motifs que l'image au lieu d'être un point est une tache d'une certaine étendue entourée d'un anneau sombre, lequel est entouré d'un anneau brillant suivi d'un anneau sombre et ainsi de suite. L'éclat des anneaux brillants décroît rapidement.

La *fig.* 18 empruntée à la thèse de doctorat de M. Ch. André représente l'étendue et l'éclat de la tache centrale et du premier anneau obscur.

127. **Pouvoir séparateur.** — On démontre que le rayon x de la tache centrale est proportionnel au rayon de la sphère d'onde,

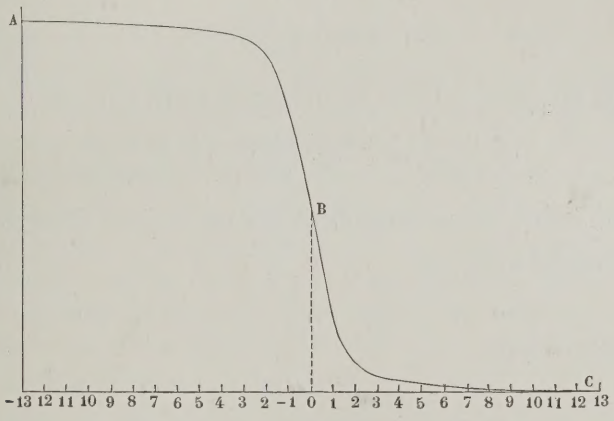
c'est-à-dire à la distance φ de l'image à l'objectif et en raison inverse de l'ouverture $2R$ de l'objectif, de sorte que

$$x = K\frac{\varphi}{R}, \tag{1}$$

K désignant un nombre constant pour un même instrument. Or l'angle ε sous lequel, du centre optique de l'objectif, on voit le rayon de la tache centrale est égal à $x : \varphi$. Donc

$$\varepsilon = \frac{K}{R}. \tag{2}$$

Fig. 18.



On voit sur la *fig.* 18 que l'éclat de la lumière dans la tache centrale décroît d'abord lentement à mesure qu'on s'éloigne du centre, puis très brusquement. On peut admettre que les images de deux astres très voisins sont séparées quand le bord de chacune passe par le centre de l'autre, c'est-à-dire quand l'angle ε est précisément égal à la distance angulaire des deux astres. Cet angle a reçu par ce motif le nom de *pouvoir optique,* ou *pouvoir séparateur* de l'instrument. Il est en raison inverse du diamètre de l'objectif, et Foucault a montré qu'il est de $1''$ environ pour un objectif de 13^{cm} d'ouverture.

128. Clarté des images produites par les systèmes optiques. — *a.* Cas ou l'objet lumineux a un diamètre apparent sensible. — *L'éclat de l'image d'un objet de diamètre apparent fini*

est égal à celui de l'objet. Soit e l'éclat d'un objet de surface S placé à la distance Δ du premier plan principal. C'est la quantité de lumière envoyée par l'unité de surface de cet objet à une autre unité de surface située à l'unité de distance. Soit de même e' l'éclat de l'image, S' sa surface, Δ' sa distance au second plan principal.

Si l'on désigne par Q la quantité de lumière reçue par une aire σ du premier plan principal, et aussi la quantité de lumière émanant d'une aire égale σ', prise sur le second plan principal, on a évidemment

$$Q = \frac{e S \sigma}{\Delta^2} = \frac{e' S' \sigma'}{\Delta'^2},$$

d'où

$$\frac{e}{e'} = \frac{S'}{S}\left(\frac{\Delta}{\Delta'}\right)^2.$$

Or les formules (23) et (24) du Chapitre III donnent

$$(3) \qquad \frac{\Delta}{\Delta'} = \frac{E - \xi}{\xi' - E'} = -\frac{k(E - \xi) + n}{n'} = \frac{n}{n'}\frac{\Phi - \xi}{E - \Phi},$$

et $\frac{S'}{S}$ est le carré du grossissement linéaire dont la valeur, d'après les mêmes formules, est

$$\frac{S'}{S} = -\frac{E - \Phi}{\Phi - \xi}.$$

Il s'ensuit que

$$\frac{e}{e'} = \frac{n^2}{n'^2},$$

de sorte que, si les milieux extrêmes sont identiques,

$$e = e'.$$

b. Cas ou l'objet lumineux n'a pas de diamètre apparent sensible. — *L'éclat de l'image d'un point lumineux est proportionnel à la surface de l'objectif de l'instrument employé.* On appelle *éclat d'un point lumineux* la quantité de lumière qu'il envoie sur une unité de surface située à l'unité de distance. Si S désigne l'aire de la première surface du système optique, $M - \xi$ sa distance à l'objet, cette surface reçoit du point lumineux une quantité de lumière Q donnée par la formule

$$Q = \frac{e S}{(M - \xi)^2},$$

où e désigne l'éclat du point lumineux.

Cette même quantité de lumière arrive sur la tache centrale dont l'aire est πx^2, de sorte que, si e' désigne l'éclat de l'image, $\xi' - M$ sa distance à la première surface

$$Q = \frac{e' \pi x^2 S}{(\xi' - M)^2},$$

la lumière qui a traversé la surface S pouvant être supposée venir de la tache centrale.

En égalant les deux valeurs de Q, on a

$$e' = \frac{e S}{(M - \xi)^2} \frac{(\xi' - M)^2}{\pi x^2 S}.$$

Or $\frac{\pi x S^2}{(\xi' - M)^2}$ est une constante. Donc, pour un même astre, e' est proportionnel à l'aire S de la première surface de l'instrument.

On arrive au même résultat en remarquant que la différence essentielle entre le cas actuel et celui de l'image d'un objet de diamètre apparent fini est que, dans ce dernier cas, l'étendue de l'image est indépendante de l'ouverture de l'instrument, tandis que l'image d'une étoile proprement dite est formée essentiellement de la tache centrale dont l'étendue est en raison inverse de l'aire de la première surface de l'instrument, de sorte que, pour ce motif, l'éclat est proportionnel à cette aire.

Il faut observer que l'éclat, dans l'instrument, de l'image de la région du ciel qui avoisine l'étoile est le même qu'à la vue directe. Donc, *la présence de l'instrument augmente la visibilité de l'étoile par rapport au ciel, proportionnellement au carré du diamètre de l'ouverture de l'instrument.*

129. Éclat des images produites sur la rétine après le passage des rayons dans un instrument d'Optique. — Soient p la demi-ouverture de la pupille, a le rayon de l'anneau oculaire, A celui de l'objectif. La quantité de lumière qui traverse l'anneau oculaire est égale à celle qui traverse l'objectif : c'est

$$\frac{e S \pi A^3}{(M - \xi)^2},$$

e, S, M, ξ ayant la même signification qu'au paragraphe précédent.

Si l'ouverture de la pupille est moindre que celle de l'anneau

oculaire, la quantité de lumière qui arrive sur la rétine est

$$\frac{e\,S\,\pi\,A^2}{(M-\xi)^2}\,\frac{\rho^2}{a^2}.$$

D'autre part, l'image sur la rétine a une surface proportionnelle au carré du grossissement linéaire $A : a$. Donc l'éclat de l'image produite sur la rétine est modifié par le grossissement dans le rapport $\frac{a^2}{A^2}$. Il sera donc

$$\frac{e\,S\,\pi\rho^2}{(M-\xi)^2},$$

c'est-à-dire ce qu'il est à la vue simple, sans instrument.

Si l'ouverture de la pupille est plus grande que celle de l'anneau oculaire, toute la lumière qui passe dans l'anneau oculaire parvient sur la rétine, de sorte que l'éclat est

$$\frac{e\,S\,\pi\,a^2}{(M-\xi)^2}.$$

Il est à celui que donnerait la vue simple dans le rapport de a^2 à p^2.

Donc *les forts grossissements, qui donnent des anneaux oculaires étroits, diminuent l'éclat des objets de dimensions apparentes finies.*

Il suffit de regarder Jupiter dans une lunette avec un grossissement faible et un grossissement fort pour s'assurer que l'œil est beaucoup moins ébloui dans le second cas que dans le premier.

Si l'objet est une étoile fixe, l'objectif en donne une image réelle dont l'éclat est proportionnel à l'aire S de l'objectif. Les considérations précédentes s'appliquent à cette image reprise par l'oculaire et l'œil. Le grossissement de l'instrument étant proportionnel à celui de l'oculaire, si à la sortie de l'oculaire l'anneau oculaire a un diamètre plus grand que celui de la pupille, l'éclat de l'étoile vue au moyen de l'instrument est proportionnel à la surface de l'objectif; si l'anneau oculaire est moins large que la pupille, l'éclat est diminué dans le rapport de l'aire de l'anneau oculaire à l'aire de la pupille.

L'éclat de l'étoile et celui du ciel sont donc modifiés dans le même rapport par la présence d'un oculaire fort; mais l'image de

l'étoile, étant plus grande, pourra impressionner davantage la rétine et la visibilité pourra être augmentée.

130. **Influence de l'œil sur le pouvoir séparateur.** — Le pouvoir séparateur ne dépend que de l'objectif de l'instrument, pourvu que cet instrument permette de voir un objet de diamètre apparent ε sous un angle d'environ une minute. Il faut donc que l'oculaire ne soit pas trop faible. Si l'on désigne par D le diamètre de l'objectif en centimètres, l'angle limite ε est $12'' : D$, en supposant qu'un objectif de 12^{cm} d'ouverture dédouble une seconde. Si G est le grossissement, l'objet de diamètre apparent ε est vu sous un angle $G\frac{12''}{D}$. Il faut donc, pour que le pouvoir séparateur ne soit pas diminué, que

$$G\frac{12''}{D} > 60''.$$

Or le grossissement G est, sensiblement, comme on le verra plus loin [n° 134, formule (11)] $\frac{F}{f}$, F désignant la longueur focale de l'objectif et f celle de l'oculaire. On doit donc avoir, pour que le pouvoir séparateur ne soit pas diminué,

$$f < \frac{F}{5D}.$$

Dans les lunettes ordinaires, la longueur focale de l'objectif est de dix à quinze fois le diamètre de l'objectif. Donc la longueur focale de l'oculaire, pour ne pas diminuer le pouvoir séparateur, ne doit pas être supérieure à 2^{cm} à 3^{cm}. Dans les télescopes le rapport de F à D est généralement beaucoup moindre, parce qu'il n'y a pas à détruire d'aberrations de réfrangibilité; mais il est presque toujours supérieur à 5^{cm}, de sorte que la limite de la distance focale des oculaires est environ 1^{cm}.

131. **Vision par une lentille.** — Reprenons les formules données au Chapitre III pour une lentille et négligeons l'épaisseur.

Désignons par φ la distance focale $M - \Phi$, par γ le grossissement linéaire, par α la distance $M - \xi$ de l'objet à la lentille,

par a' la distance $M - \xi'$ de l'image à la lentille, nous aurons

$$\frac{1}{\varphi} = (n-1)\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right), \tag{4}$$

$$\gamma = \frac{\varphi}{\xi - \Phi} = \frac{\varphi}{\xi + \varphi - M} = \frac{\varphi}{\varphi - a}, \tag{5}$$

et la relation

$$-\frac{1}{a'} + \frac{1}{a} = \frac{1}{\varphi} \tag{6}$$

donne, par suite,

$$a' = \gamma a. \tag{7}$$

Nous supposerons a positif, l'objet étant d'un côté de la lentille et l'œil de l'autre. L'image est réelle si a' est négatif, virtuelle si a' est positif.

Le grossissement angulaire est égal à l'unité.

Cherchons sous quel angle visuel θ est vue l'image. Désignons à cet effet par b la hauteur de l'objet supposé rectiligne et perpendiculaire à l'axe de la lentille, par b' celle de l'image, de sorte que

$$b' = \gamma b.$$

Soit aussi d la distance de l'œil à la lentille. La distance de l'œil à l'image est, dans tous les cas, $d + a'$, et l'on a

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{b'}{d + a'} = \frac{\gamma b}{d + a'} = \frac{d}{a\left(1 + \frac{d}{a'}\right)}. \tag{8}$$

On voit que si a' est négatif, c'est-à-dire si l'image est réelle, on peut, en prenant d assez voisin de a', c'est-à-dire en rapprochant l'œil de l'image, rendre θ aussi grand que l'on veut. Seulement aucun œil ne percevrait alors une image distincte; si m est la distance minimum de la vision distincte, $d + a'$ ou $d - (-a')$ ne peut être inférieur à m, de sorte que l'on doit avoir

$$\frac{d}{(-a')} - 1 > \frac{m}{(-a')}$$

ou

$$1 + \frac{d}{a'} < \frac{m}{a'}.$$

L'angle θ est négatif, et a en valeur absolue un maximum donné par

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{ba'}{am} = \frac{b\gamma}{m}.$$

Si a' est positif, c'est-à-dire si l'image est virtuelle, le maximum de θ s'obtient en faisant d nul, c'est-à-dire en collant l'œil contre la lentille, et ce maximum est $\frac{b}{a}$. L'angle est le même que si la lentille n'existait pas. En diminuant a, c'est-à-dire rapprochant l'objet de la lentille, on augmente θ à volonté. Seulement il est nécessaire que l'image soit au moins à la distance minimum de la vision distincte ou que a' soit plus grand que m. Par la formule (6) cette condition donne

$$\frac{1}{a} < \frac{1}{\varphi} + \frac{1}{m},$$

ce qui empêche de rapprocher l'objet de la lentille au delà d'une certaine limite.

Il s'ensuit que le maximum de θ est donné par la formule

$$\operatorname{tang}\theta = b\left(\frac{1}{\varphi} + \frac{1}{m}\right).$$

D'après cela, une lentille divergente montre l'objet sous un angle moindre que l'angle $\frac{b}{m}$ sous lequel on le verrait à l'œil nu ; une lentille convergente sous un angle plus grand, et le grossissement, c'est-à-dire le rapport de ces deux angles, est

$$1 + \frac{m}{\varphi}.$$

On peut exprimer θ en fonction de b, a, φ, m. La formule (8) donne

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{b}{\left(1 + \frac{d}{a} - \frac{1}{\varphi}\right)} = \frac{b}{a + d - \frac{ad}{\varphi}},$$

Cette formule montre que si $a = \varphi$, c'est-à-dire si l'objet est au foyer, l'angle θ ne dépend pas de la position de l'œil. Si $d = \varphi$, θ ne dépend pas de la position de l'objet. Dans ces deux

cas, l'angle sous lequel on voit l'image est égal à celui sous lequel on verrait l'objet à l'œil nu, à une distance égale à la distance focale.

Il y a lieu en outre d'observer que le plus grand angle visuel possible est limité par l'ouverture de la lentille. Si A est la demi-ouverture, le plus grand demi-angle utilisable a pour tangente $\frac{A}{d}$, de sorte que le demi-champ de vue, c'est-à-dire la plus grande demi-ouverture linéaire d'un objet entièrement visible s'obtient en égalant $\operatorname{tang}\theta$ à $\frac{A}{d}$. C'est donc

$$b = A a \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{a} - \frac{1}{\varphi} \right).$$

132. Loupe. — Les considérations précédentes s'appliquent immédiatement à la loupe. C'est simplement une lentille convergente. Si on l'emploie en mettant l'objet au foyer, les rayons issus d'un même point de l'objet émergent parallèlement, de sorte que la vision est distincte. L'angle θ sous lequel on voit l'objet est alors sensiblement $\frac{b}{\varphi}$. Il s'ensuit que la dimension b des moindres détails que l'on puisse distinguer dans ces conditions avec une loupe est proportionnelle à la distance focale de cette loupe. Si cette longueur focale est égale à 1^{cm} et que l'angle minimum perceptible soit $1'$, la dimension minimum b est environ $\frac{3}{1000}$ de millimètre.

Il y a lieu de choisir la forme de la loupe de manière à diminuer les aberrations de sphéricité. On a vu que pour un crown dont l'indice est sensiblement $\frac{3}{2}$, il convient de faire $R' = -6R$.

En prenant $R' = \infty$, on a un résultat presque aussi avantageux, surtout si l'indice est un peu plus grand. C'est une lentille plan-convexe tournant sa convexité vers l'objet.

133. Loupe à deux verres. — Pour diminuer les aberrations de sphéricité on remplace la loupe ordinaire par une combinaison de deux lentilles. La théorie de cet instrument résulte immédiatement des formules données au n° 67. Si l'on désigne par φ_1, φ_2 les distances focales des lentilles successives, par t leur distance, par φ la distance focale du système, E, E' ses plans principaux,

E_1, E'_1, E_2, E_2 ceux des deux lentilles, on a

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\varphi_1} + \frac{1}{\varphi_2} - \frac{t}{\varphi_1\varphi_2},$$

$$E - E_1 = \frac{\varphi}{\varphi_2}\, t,$$

$$E' - E'_2 = -\frac{\varphi}{\varphi_1}\, t.$$

La relation entre la position de l'image et celle de l'objet est

$$\frac{1}{E - \xi} + \frac{1}{\xi' - E'} = \frac{1}{\varphi}$$

ou encore

$$(\Phi - \xi)(\xi' - \Phi') = \varphi^2.$$

Le grossissement linéaire est

$$\frac{\varphi}{\xi - \Phi}.$$

Pour que la vision soit nette et favorable, il faut, en supposant l'œil placé contre la deuxième lentille et négligeant les épaisseurs, que la distance $E_2 - \xi'$ de l'image à l'œil soit au moins égale à la distance minimum m de la vision distincte. Posant

$$E_2 - \xi' = m,$$

on trouve que le grossissement linéaire

$$\frac{m}{\varphi} + 1 - \frac{t}{\varphi_1},$$

$\frac{m}{\varphi}$ étant, dans la pratique grand par rapport aux autres termes, est sensiblement

$$\frac{m}{\varphi}.$$

134. Lunette astronomique. Disposition des lentilles. Grossissement. — La lunette astronomique est formée d'un objectif achromatique et d'un oculaire à deux verres. Nous avons déjà donné (nos 91 à 93) les valeurs des éléments principaux et les conditions d'achromatisme.

Désignant par φ_0, φ_1, φ_2 les distances focales de l'objectif et des

deux verres de l'oculaire, t_1, t_2 les intervalles qui les séparent, la condition pour que la vision soit normale, c'est-à-dire pour que des rayons incidents parallèles forment encore, à l'émergence, un faisceau de rayons parallèles est

$$\frac{1}{\varphi_1} = \frac{1}{t_1 - \varphi_0} + \frac{1}{t_2 - \varphi_2} \tag{9}$$

ou encore

$$(\varphi_0 + \varphi_1 - t_1)(\varphi_2 + \varphi_1 - t_2) = \varphi_1^2. \tag{10}$$

Le grossissement angulaire L est

$$L = -\frac{\varphi_0 \varphi_1}{\varphi_2(\varphi_0 + \varphi_1 - t_1)} = -\frac{\varphi_0}{\varphi_1 \varphi_2}(\varphi_1 + \varphi_2 - t_2) = -\frac{\varphi_0}{\varphi}, \tag{11}$$

φ désignant la distance focale de l'oculaire.

L'un des principaux objets des lunettes étant d'obtenir de forts grossissements, on prendra φ_1 et φ_2 petits par rapport à φ_0 et aussi t_1 voisin de $\varphi_0 + \varphi_1$ et par suite de φ_0.

Les relations (11) permettent d'exprimer t_1 et t_2 en fonction des distances focales et du grossissement. On trouve

$$\begin{cases} t_1 = \varphi_0 + \varphi_1 + \dfrac{\varphi_0 \varphi_1}{\varphi_2} \dfrac{1}{L}, \\ t_2 = \varphi_1 + \varphi_2 + \dfrac{\varphi_1 \varphi_2}{\varphi_0} L, \end{cases} \tag{12}$$

t_1 étant voisin de $\varphi_0 + \varphi_1$, L est de l'ordre de $\frac{\varphi_0}{\varphi_2}$ et par suite le rapport de t_2 à t_1 est petit, de l'ordre de φ_1 à φ_0.

C'est pour ces motifs que les deux verres de l'oculaire sont toujours à courts foyers, voisins l'un de l'autre et du foyer principal de l'objectif. On y trouve en outre l'avantage d'avoir pour l'oculaire des lentilles de petites dimensions puisque le faisceau lumineux dans le voisinage de ce foyer est étroit et s'écarte peu de l'axe principal de l'instrument.

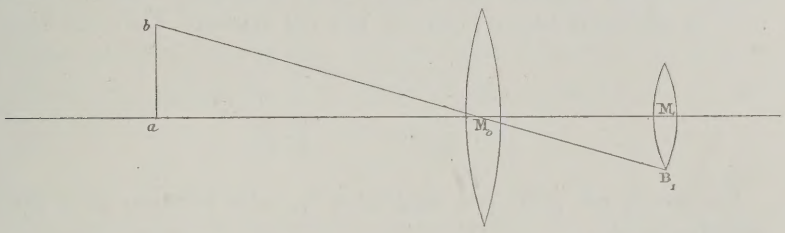
L'image est intervertie si le grossissement L est négatif, et cela arrive si t_1 est moindre que $\varphi_0 + \varphi_1$. Dans ce cas t_2 est moindre que $\varphi_1 + \varphi_2$.

La distance des deux verres de l'oculaire est moindre que la somme de leurs distances focales. Cette circonstance se présente toujours dans les oculaires des lunettes astronomiques.

135. **Champ de la lunette astronomique. Dimensions des lentilles.** — On appelle *champ le plus grand diamètre apparent d'un objet visible dans la lunette.*

Si l'on considère un objet *ab* perpendiculaire à l'axe, la lunette

Fig. 19.



permettra de le voir tout entier si la droite $b\mathrm{M}_0$ qui joint le bord b de cet objet au centre optique (1) M_0 de l'objectif rencontre la seconde lentille $\mathrm{M}_1\mathrm{B}_1$.

Si le point de rencontre est le bord même B_1 de la seconde lentille, le champ est le double de l'angle $a\mathrm{M}_0 b$. C'est donc l'angle sous lequel du centre optique de l'objectif on voit la première lentille de l'oculaire.

Dans la théorie générale (n° 65) nous avons représenté par $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots$ les coefficients angulaires d'un rayon incident et des rayons successivement réfractés par les diverses lentilles (2) et par $\mathrm{B}_0, \mathrm{B}_1, \ldots$ les coordonnées des points où ces rayons rencontrent les diverses lentilles. Si C désigne le champ, c'est-à-dire la valeur maximum de β_0, les valeurs correspondantes de $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \ldots$ seront les ouvertures utiles des lentilles successives.

Dans le cas de la lunette astronomique à oculaire double on a

$$(13)\qquad \begin{cases} \mathrm{B}_0 = 0, & \beta_1 = \beta_0 = \mathrm{C}, \\ \mathrm{B}_1 = t_1\mathrm{C}, & \beta_2 = \beta_1 - \dfrac{t_1}{\varphi_1}\mathrm{C}, \\ \mathrm{B}_2 = t_1\mathrm{C} + t_2\mathrm{C} - \dfrac{t_1 t_2}{\varphi_1}; & \beta_3 = \beta_2 - \left(\dfrac{t_1 + t_2}{\varphi_2} - \dfrac{t_1 t_2}{\varphi_1\varphi_2}\right)\mathrm{C}. \end{cases}$$

(1) On suppose ici négligeables les épaisseurs des lentilles. Les deux points principaux de l'objectif se confondent alors en un seul que l'on nomme *centre optique.*

(2) On a représenté en réalité ces coefficients par $\frac{\beta_0}{n_0}, \frac{\beta_1}{n_1}, \ldots$ Mais ici les lentilles étant toutes plongées dans le même milieu les nombres $n_0, n_1, \ldots$ sont égaux et on peut les faire égaux à un.

La valeur de $\frac{\beta_3}{C}$ coïncide bien avec la valeur trouvée (n° 93) pour le grossissement angulaire.

136. **Oculaire d'Huygens.** — Pour diminuer l'aberration de sphéricité, on répartit également entre les deux lentilles de l'oculaire la déviation totale produite par cet oculaire. On pose donc

$$\beta_3 - \beta_2 = \beta_2 - \beta_1$$

ou

$$\frac{t_1}{\varphi_1} = \frac{1}{\varphi_2}\left(t_1 + t_2 - \frac{t_1 t_2}{\varphi_1}\right).$$

Comme t_2 est petit par rapport à t_1, cette relation peut être remplacée par

$$\frac{t_1}{\varphi_1} = \frac{t_1}{\varphi_1} - \frac{t_1 t_2}{\varphi_1 \varphi_2}$$

ou

$$t_2 = \varphi_1 - \varphi_2.$$

Si l'on combine cette condition avec celle donnée au n° 93 pour l'achromatisme, savoir

$$t_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2},$$

on trouve

$$\varphi_1 = 3\varphi_2, \qquad t_2 = 2\varphi_2.$$

De plus, la condition fondamentale $K = 0$ donne

$$t_1 - \varphi_0 = -\frac{\varphi_1}{2},$$

de sorte que t_1 est moindre que φ_0. Comme on en déduit

$$t_1 + t_2 = \varphi_0 + \frac{\varphi_1}{6},$$

on voit que le foyer de l'objectif se trouve entre les deux verres de l'oculaire. L'oculaire ainsi défini s'appelle *oculaire d'Huygens*. Il est achromatique et n'a que de faibles aberrations de sphéricité. On l'appelle aussi *oculaire négatif*. Il est formé de deux lentilles plan-convexes dont les faces planes sont tournées du côté de l'œil.

137. **Oculaire de Ramsden.** — L'oculaire d'Huygens ne peut être employé quand on a besoin de placer dans le plan focal de

l'objectif un appareil de mesure, car les conditions de la vision de chaque observateur rendent indispensable la mobilité de l'oculaire. On emploie dans ce cas une combinaison due à Ramsden.

Dans l'oculaire de Ramsden, les deux lentilles sont identiques. Ce sont des lentilles plan-convexes ayant leurs convexités opposées l'une à l'autre. On ne fait pas t_2 nulle; mais cette distance est très petite et égale à $\frac{2}{3}\varphi_2$. De sorte que cet oculaire n'est pas entièrement achromatique. La condition $K = 0$ donne

$$t_1 = \varphi_0 + \frac{\varphi_2}{4}.$$

Le plan focal de l'objectif est donc derrière l'oculaire, de sorte que l'on peut, sans empêcher le tirage de l'oculaire, placer dans le plan focal tel appareil que l'on veut. L'oculaire de Ramsden s'appelle aussi *oculaire positif*.

138. Grossissements obtenus par les divers oculaires. — D'après le n° 133, le grossissement donné par un oculaire à deux verres, employé de telle manière que, l'œil étant collé contre la seconde lentille, l'image soit à la distance minimum m de la vision distincte est

$$\frac{m}{\varphi} + 1 - \frac{t}{\varphi_1}$$

ou sensiblement

$$\frac{m}{\varphi}.$$

Dans l'oculaire négatif, on a

$$\varphi_1 = 3\varphi_2, \qquad t = 2\varphi_2,$$

d'où

$$\varphi = \frac{3}{2}\varphi_2.$$

Le grossissement est donc

$$\frac{2m}{3\varphi_2} = \frac{2m}{\varphi_1}.$$

Dans l'oculaire de Ramsden, on a

$$\varphi_2 = \varphi_1 \qquad \text{et} \qquad t = \frac{2}{3}\varphi_1,$$

d'où

$$\varphi = \frac{3}{4}\varphi_1 = \frac{9}{8}t.$$

Le grossissement est sensiblement

$$\frac{4}{3}\frac{m}{\varphi_1}.$$

On emploie comme microscope simple une autre loupe à deux verres nommée *doublet de Wollaston* dans laquelle on a

$$\varphi_2 = 3\varphi_1, \qquad t = \frac{1}{2}\varphi_2.$$

On a alors

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\varphi_1} + \frac{1}{3\varphi_1} - \frac{1}{2\varphi_1} = \frac{5}{6\varphi_1},$$

d'où

$$\varphi = \frac{6}{5}\varphi_1$$

et le grossissement est

$$\frac{5}{6}\frac{m}{\varphi_1}.$$

Si l'on employait le doublet de Wollaston comme oculaire d'une lunette astronomique, on aurait

$$\frac{1}{\varphi_1} = \frac{1}{t_1 - \varphi_0} + \frac{1}{\frac{1}{2}\varphi_2 - \varphi_2} = \frac{1}{t_1 - \varphi_0} - \frac{2}{3\varphi_1},$$

d'où

$$t_1 - \varphi_0 = \frac{3}{5}\varphi_1 = \frac{\varphi_2}{5} = \frac{2}{5}t_2.$$

Le doublet de Wollaston serait donc un oculaire positif. Les deux lentilles qui le composent sont des lentilles plan convexes dont les convexités sont tournées vers l'œil.

139. **Autres éléments optiques des oculaires composés.** — Nous avons donné au n° 133, à propos de la loupe à deux verres, les divers éléments optiques d'un oculaire double. Nous avons trouvé

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\varphi_1} + \frac{1}{\varphi_2} - \frac{t}{\varphi_1\varphi_2};$$

$$E = E_1 + \frac{\varphi}{\varphi_2}t,$$

$$E' = E'_2 - \frac{\varphi}{\varphi_1}t.$$

E_1 et E'_2 sont les abscisses du premier point principal de la première lentille et du second de la deuxième, t est la distance du second plan principal de la première au premier de la seconde.

Nous regarderons les épaisseurs de ces lentilles comme négligeables, de sorte que t sera la distance des lentilles, E_1 et E'_1 coïncideront avec l'abscisse de la première, E_2 et E'_2 avec l'abscisse de la seconde.

Cela étant, on obtient, pour les trois oculaires les valeurs suivantes :

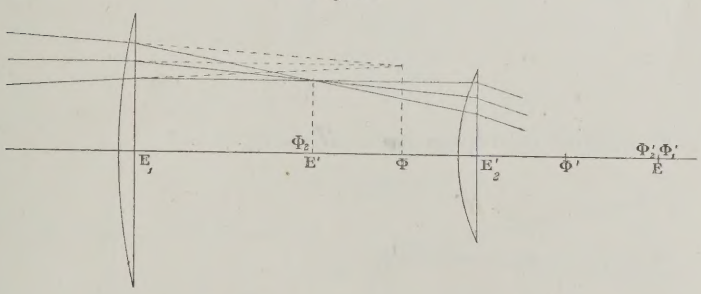
Oculaire d'Huygens.

$$\varphi = \frac{3}{2}\varphi_2;$$

$$\begin{aligned} E &= E_1 + 3\varphi_2 = E'_2 + \varphi_2, \\ E' &= E'_2 - \varphi_2 = E_1 + \varphi_2, \\ \Phi &= E_1 + \frac{3}{2}\varphi_2 = E'_2 - \frac{1}{2}\varphi_2, \\ \Phi' &= E'_2 + \frac{1}{2}\varphi_2 = E_1 + \frac{2}{5}\varphi_2. \end{aligned}$$

Le tout est représenté sur la *fig.* 20 où E′ est le milieu de $E_1 E'_2$

Fig. 20.



et les cinq points E′, Φ, E'_2, Φ′, E sont équidistants.

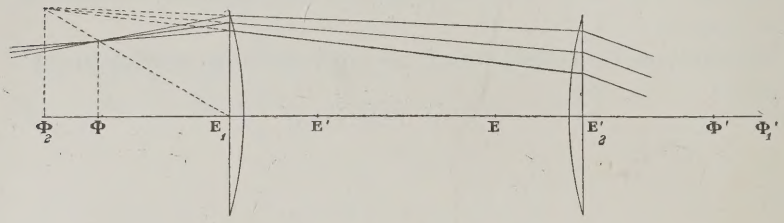
Oculaire de Ramsden.

$$\varphi = \frac{3}{4}\varphi_1 = \frac{9}{8}t;$$

$$\begin{aligned} E &= E_1 + \frac{3}{4}t, \\ E' &= E'_2 - \frac{3}{4}t = E_1 + \frac{1}{4}t, \\ \Phi &= E_1 - \frac{3}{8}t, \\ \Phi' &= E'_2 + \frac{3}{8}t. \end{aligned}$$

La disposition est représentée sur la *fig.* 21 où E_1E' et EE'_2 sont égaux au quart de $E_1E'_2$. ΦE_1 est les trois quarts de Φ_2E_1 et $\Phi'E'_2$ est les trois quarts de $E'_2\Phi'_1$. Les deux distances Φ_2E_1, $E'_2\Phi'_1$ sont égales à la moitié de $E_1E'_2$.

Fig. 21.



Oculaire de Wollaston.

$$\varphi = \frac{2}{5}\varphi_2 = \frac{6}{5}\varphi_1 = \frac{4}{5}t;$$

$$E = E_1 + \frac{2}{5}t,$$

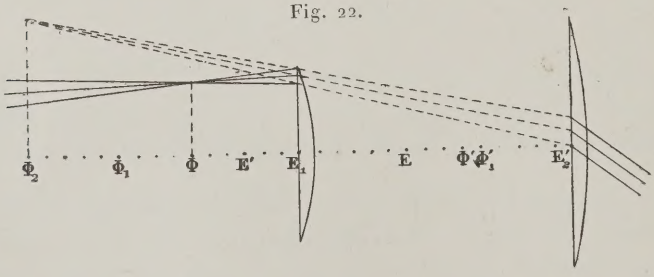
$$E' = E_1 - \frac{1}{5}t,$$

$$\Phi = E_1 - \frac{2}{5}t,$$

$$\Phi' = E'_2 - \frac{2}{5}t.$$

La disposition est représentée sur la *fig.* 22.

Fig. 22.



140. Détermination d'une lentille unique équivalente à un oculaire à deux verres. — Un système optique quelconque peut, au point de vue des réfractions, en première approximation, être remplacé par une lentille infiniment mince ayant même distance focale que le système et placée au premier plan principal. Si en effet on se reporte à la construction du rayon émergent corres-

pondant à un rayon incident donné, on verra que la substitution revient à transporter tous les rayons émergents parallèlement à eux-mêmes de telle façon que le point où chacun d'eux coupe le second plan principal se déplace parallèlement à l'axe et vienne dans le premier plan principal.

D'après cela, on peut toujours dans la théorie d'un instrument d'Optique, lunette astronomique ou microscope, remplacer l'oculaire composé par un oculaire simple de même distance focale et placé au premier plan principal de l'oculaire composé.

141. Perte apparente de la faculté d'accommodation dans les instruments d'Optique. — Considérons donc un instrument formé d'un objectif de distance focale φ_1 et d'un oculaire de distance focale φ_2. Supposons que l'on regarde au moyen de cet instrument un objet situé au delà du premier foyer de l'objectif. Soient ξ l'abscisse de ce point, M_1 l'abscisse de l'objectif, M_2 l'abscisse de l'oculaire. En désignant par E et E′ les plans principaux du système, par φ sa distance focale, par t la différence $M_1 - M$, on a, par les formules du n° 133,

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\varphi_1} + \frac{1}{\varphi_2} - \frac{t}{\varphi_1 \varphi_2},$$

$$E - M_1 = \frac{\varphi}{\varphi_2} t, \qquad E' - M_2 = -\frac{\varphi}{\varphi_1} t,$$

$$E - \Phi = \Phi' - E' = \varphi,$$

$$(\Phi - \xi)(\xi' - \Phi') = \varphi^2.$$

Le grossissement linéaire est

$$\frac{\varphi}{\xi - \Phi}.$$

Pour que l'œil voie distinctement, il faut que ξ' soit compris entre ∞ et $M_2 - m$, m étant la distance minimum de la vision distincte. Il faut pour cela que ξ soit compris entre Φ et $\Phi - \dfrac{\varphi^2}{M_2 - \Phi' - m}$. La limite dans laquelle on pourra déplacer l'objet sera donc

$$\frac{\varphi^2}{M_2 - \Phi' - m} = \frac{\varphi^2}{E' + \dfrac{\varphi}{\varphi_1} t - \Phi' - m} = \frac{\varphi^2}{\dfrac{\varphi}{\varphi_1} t - \varphi - m}.$$

Si l'on suppose

$$m = 0^{m},15, \qquad \varphi_2 = 0,02, \qquad \varphi_1 = 0,005, \qquad t = 0,20,$$

on a

$$\varphi = \frac{1}{1750},$$

et l'on trouve que l'amplitude du déplacement tolérable de l'objet est moindre que $\frac{1}{500}$ de millimètre.

S'il s'agit seulement d'une loupe de distance focale φ pour laquelle on a

$$(\Phi - \xi)(\xi' - \Phi') = \varphi^2,$$

ξ' sera à l'infini si l'objet est au foyer Φ, et l'image sera vue à la distance m, si

$$\xi' = \Phi' - \varphi - m$$

ou si

$$\frac{\varphi^2}{\Phi - \xi} = -\varphi - m,$$

ce qui donne

$$\xi = \Phi + \frac{\varphi^2}{\varphi + m}.$$

On peut donc déplacer l'objet dans un intervalle égal à

$$\frac{\varphi^2}{\varphi + m}.$$

S'il s'agit d'une loupe de $0^{m},02$ de distance focale et que m soit $0^{m},15$, cet intervalle n'est que de $2^{mm},35$. Si m était $0^{m},30$, nombre fréquemment adopté, le déplacement tolérable ne serait que $1^{mm},25$.

Le cas d'une lunette astronomique pointée à ∞ est assimilable à celui d'une simple loupe; l'image fournie par l'objectif est au foyer de l'objectif et on la regarde au moyen d'un oculaire qui peut s'enfoncer plus ou moins dans le tube de la lunette, de façon à permettre l'accommodation à toute vue. ξ est d'autant plus grand, pour une même position de la loupe, que m est plus petit. Ainsi les personnes qui ont la vue courte doivent rapprocher l'oculaire du foyer de l'objectif ou l'enfoncer dans le tube, les autres le tirer.

142. Microscope composé. — Le microscope composé ne diffère de la lunette astronomique qu'en ce que l'objectif d'un microscope

a une très faible distance focale. L'objet se place un peu au delà du premier foyer de l'objectif et très près de ce foyer. Il se forme, à une distance relativement grande de l'objectif, une image réelle que l'on regarde au moyen d'un oculaire négatif si l'on ne veut pas faire de mesure, ou d'un oculaire positif si l'on a besoin de placer un appareil de mesure dans le tube, et que l'on ne veuille pas fixer invariablement la distance de l'oculaire à l'objectif.

Il y a lieu de remarquer cependant que la mise au point peut se faire par un déplacement du microscope tout entier, et, d'après ce que nous avons vu dans la première partie du paragraphe précédent, cette mise au point sera extrêmement sensible.

Le grossissement est manifestement égal au produit du grossissement dû à l'objectif par celui de l'oculaire. Ce dernier, ne dépendant que de la distance de la vision distincte, est constant pour un même observateur. Le grossissement de l'objectif dépend de la distance de l'objet à l'objectif, et, par suite, reste constant pour un même observateur si la position de l'oculaire par rapport à l'objectif est invariable. De sorte qu'un observateur ne modifie pas la position de l'oculaire de son microscope. Il déplace le microscope tout entier s'il veut examiner les divers plans d'un objet transparent.

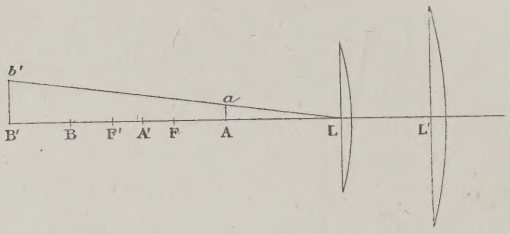
Pour diminuer les aberrations de sphéricité, on compose les objectifs de microscope de plusieurs lentilles, de manière à obtenir par plusieurs réfractions la déviation totale des rayons lumineux qui correspond à un grossissement donné. D'après ce qui a été expliqué à propos des oculaires, les aberrations sont ainsi considérablement diminuées. Les opticiens sont parvenus à faire des objectifs permettant d'obtenir de bonnes images par des rayons inclinés de 70° sur l'axe. De tels résultats sont tout à fait en dehors des théories exposées dans cet Ouvrage. C'est au botaniste Lister qu'est due leur explication sommaire.

Lister a montré que toute lentille plan-convexe L est aplanétique, c'est-à-dire dépourvue d'aberration de sphéricité pour deux points A et B situés sur son axe, l'un en deçà, l'autre au delà du foyer principal F (*fig.* 23). De plus, l'expérience montre que si le point lumineux est entre A et B l'aberration est positive, et que s'il est en dehors de AB elle est négative.

Un objet Aa placé en A donne une image virtuelle $B'b'$. Ima-

ginons qu'une seconde lentille plan-convexe L′ de foyer F′ ait en B′ son premier point d'aberration minimum. On obtiendra, derrière la lentille L′, une image réelle dépourvue d'aberration.

Fig. 23.



Si l'objet Aa se déplace de A vers B, l'image virtuelle a une aberration positive, c'est-à-dire que les rayons marginaux donnent une image plus voisine de la lentille que celle que forment les rayons centraux. En même temps l'image B′b′ s'éloigne aussi de la lentille, de sorte que, la nouvelle position de cette image étant en dehors de B′A′, l'image formée par la seconde lentille a une aberration négative. On conçoit donc qu'il puisse y avoir compensation entre ces deux aberrations de signes contraires.

143. **Télescopes à miroirs.** — La réflexion étant un cas particulier de la réfraction, tout ce qui a été dit des objectifs peut s'appliquer aux miroirs sphériques; seulement il a fallu imaginer des moyens de recevoir les images et de les examiner avec des oculaires. Les principaux procédés employés sont ceux de Newton, de Herschel, de Grégory et de Cassegrain. Nous les décrirons dans les paragraphes suivants.

Nous ajouterons immédiatement que, dans l'application des miroirs à l'Astronomie, il est préférable de substituer aux miroirs sphériques des miroirs paraboliques, qui sont aplanétiques pour des rayons parallèles à l'axe. Il est à remarquer au reste que la distance des points correspondants d'un miroir sphérique et d'un miroir parabolique, ayant même sommet et même foyer, est très faible. On reconnaît aisément que si $\frac{p}{2}$ est la distance focale du miroir, y la distance des deux points correspondants à l'axe, la

distance des deux points est à peu près égale à

$$\frac{y^4}{8p^3}.$$

Si l'on suppose un miroir à court foyer, de $0^m,80$ d'ouverture et 5^m de distance focale, tel que celui de l'Observatoire de Toulouse, cette expression est moindre que $\frac{1}{300}$ de millimètre.

La loi de la réfraction de la lumière étant indépendante de la longueur d'onde des rayons lumineux, les miroirs sont achromatiques. Les télescopes n'ont donc pas d'autres défauts d'achromatisme que ceux qui proviennent des oculaires.

144. Argenture des miroirs de verre. — Les miroirs construits aujourd'hui sont en verre; on dépose, par un procédé chimique, sur leur surface, une mince couche d'argent. Le dépôt de cette couche ne paraît pas altérer les qualités optiques, ce qui prouve que la couche a une épaisseur absolument constante. Un miroir qui vient d'être argenté offre sensiblement les mêmes qualités optiques qu'un objectif de même ouverture.

Le procédé d'argenture employé aujourd'hui consiste à mélanger dans une bassine argentée, où le miroir est renversé sur trois cales, des solutions d'ammoniaque, de nitrate d'argent, de soude et de sucre interverti. On mélange d'abord dans la bassine l'ammoniaque, la soude et le nitrate d'argent, qui sont sans action l'un sur l'autre, après quoi on verse le sucre interverti qui produit immédiatement un précipité noir d'argent pulvérulent. On agite la bassine jusqu'à ce que le miroir dont la face à argenter est vue par transparence paraisse entièrement brillant. A ce moment il se forme à la surface du liquide des paillettes d'argent métallique. On retire alors le miroir, on le lave à grande eau, on le laisse sécher en le posant sur sa tranche; puis on le polit au moyen de tampons en peau de chamois recouverts de rouge d'Angleterre très fin.

La partie la plus délicate de l'opération est le nettoyage de la surface avant l'argenture : ce nettoyage se fait au moyen d'une petite quantité d'acide nitrique que l'on étend rapidement au moyen d'un tampon de coton cardé; après quoi on lave à l'eau distillée, et l'on plonge le miroir dans un mélange par parties égales de la solution de soude et d'alcool à 36°.

Les proportions des solutions à employer sont les suivantes :

N° 1.	Eau distillée.....	8^{lit}
	Nitrate d'argent cristallisé....	640^{gr}
N° 2.	Eau distillée.....	8^{lit}
	Ammoniaque pure à 22°.....	1120^{cc}
N° 3.	Eau distillée.....	8^{lit}
	Soude caustique.....	270^{gr}

On emploie les trois solutions et celle de sucre interverti par volumes égaux.

Pour préparer le sucre interverti, on fait dissoudre 250^{gr} de sucre blanc ordinaire dans 800^{gr} d'eau distillée; on ajoute 3^{cc} d'acide nitrique pur, on porte à l'ébullition que l'on maintient un quart d'heure et on laisse refroidir. On ajoute 200^{cc} d'alcool à 36° pour empêcher la fermentation et l'on étend avec de l'eau distillée pour former 8^{lit}.

145. **Théorie de la réflexion sur un miroir.** — Il nous suffira d'appliquer les formules données au Chapitre III pour un instrument d'Optique quelconque. Si, dans les formules du n° 48, a, on fait

$$n = 1, \qquad n' = -1,$$

elles deviennent

$$b' = b, \qquad c' = c,$$

$$\beta' = \beta + \frac{2}{O - M} b, \qquad \gamma' = \gamma + \frac{2}{O - M} c.$$

La comparaison avec les formules (4) et (5) du même numéro montre que la théorie générale sera applicable si l'on prend

$$g = 1, \qquad h = 0, \qquad k = \frac{2}{O - M}, \qquad l = 1.$$

Posons, comme dans la théorie générale,

$$O - M = r.$$

Nous trouvons, pour les abscisses des plans principaux et des plans focaux,

$$E = E' = M,$$

$$\Phi = \Phi' = M + \frac{r}{2}.$$

Ainsi, les points principaux se confondent avec le sommet du miroir et les foyers avec le milieu de la droite qui joint le centre de courbure au sommet.

La relation entre les abscisses ξ, ξ' d'un point lumineux et de son image est susceptible des deux formes

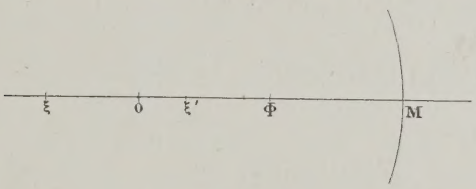
$$(\Phi - \xi)(\Phi - \xi') = \left(\frac{r}{2}\right)^2, \qquad \frac{1}{\xi - M} + \frac{1}{\xi' - M} = \frac{2}{r};$$

de sorte que le point et l'image sont situés d'un même côté du foyer. Le grossissement linéaire est

$$\frac{\Phi - M}{\Phi - \xi}.$$

146. **Miroir concave.** — Dans un miroir concave (*fig.* 24), r est négatif. Le foyer est en avant du miroir. Ou bien l'image et

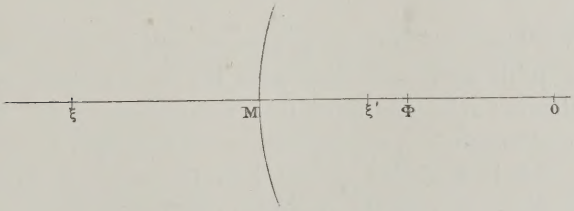
Fig. 24.



l'objet sont l'un et l'autre en avant du foyer et alors le grossissement étant négatif, l'image est renversée ; ou bien l'objet et l'image sont au delà du foyer, l'un en avant du miroir, l'autre au delà, l'un de ces points étant réel, l'autre virtuel. Dans ce cas, l'image est droite.

147. **Miroir convexe.** — Dans un miroir convexe (*fig.* 25)

Fig. 25.



r est positif : le foyer et le centre sont au delà du miroir.

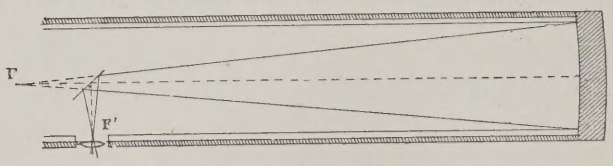
Si l'objet et l'image sont en avant du foyer, l'un de ces points est réel, l'autre virtuel, et, le grossissement étant positif, l'image est droite.

Si l'objet et l'image sont au delà du foyer, l'un et l'autre sont virtuel; l'un est en avant du centre, l'autre au delà; le grossissement étant négatif, l'image est renversée.

148. **Télescope d'Herschel.** — Le télescope d'Herschel se composait simplement d'un miroir concave dont l'axe était un peu incliné sur l'axe du tube, de façon que l'image d'un astre venait se former au bord du tube et y était reçue par un oculaire. Un tel instrument offrait l'avantage de ne pas arrêter, comme les télescopes de Newton, de Grégory et de Cassegrain, les rayons lumineux dirigés vers le centre du miroir. Il avait l'inconvénient pratique d'obliger à recevoir toujours sur le miroir des rayons inclinés sur son axe.

149. **Télescope de Newton.** — Le télescope de Newton se compose d'un miroir concave vers le foyer duquel on a placé, entre ce foyer et le miroir, un petit miroir plan incliné à 45° sur l'axe du grand miroir. Ce petit miroir reporte purement et simplement, sur le côté du tube, l'image de l'astre sans la modifier en rien. On l'examine au moyen d'un oculaire.

Fig. 26.

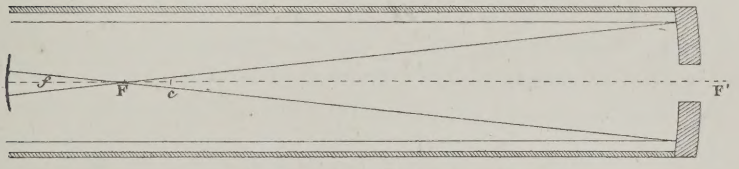


Aujourd'hui, on donne aux grands miroirs la forme parabolique, de sorte qu'ils sont, au moins pour les rayons parallèles à l'axe, non seulement achromatiques, mais aussi aplanétiques. On profite de ces circonstances pour donner aux télescopes à miroirs une distance focale moindre qu'aux lunettes astronomiques. Seulement on diminue ainsi la grandeur de l'image d'un objet à diamètre apparent sensible.

Le télescope de Newton offre quelques difficultés de manœuvre, résultant de la nécessité où est l'observateur de s'établir à l'extrémité supérieure du tube. A l'ordinaire, le petit miroir et l'oculaire sont liés à une couronne mobile autour du tube, permettant d'amener l'oculaire dans une position telle que l'observateur puisse l'atteindre. Cette difficulté est évitée dans les télescopes de Grégory et de Cassegrain.

150. **Télescope de Grégory.** — Ce télescope (*fig.* 27) se com-

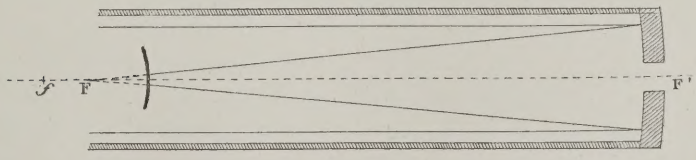
Fig. 27.



pose d'un grand miroir concave et d'un petit miroir également concave, tourné en sens inverse, ayant son centre et son sommet sur l'axe du premier. Les miroirs sont disposés de telle manière que le foyer F du grand soit entre le centre et le foyer *f* du petit. Dans ces conditions, le grand miroir donne d'un astre une image réelle dans le plan focal F et le petit miroir donne de cette image une seconde image située au delà du centre. On peut déterminer la courbure du petit miroir et sa position de telle manière que cette image se trouve en F′, un peu au delà du grand miroir, dont la partie centrale est percée d'un trou, et l'on regarde cette image, qui est droite, au moyen d'un oculaire. La manœuvre d'un télescope ainsi construit est analogue à celle d'une lunette astronomique.

151. **Télescope de Cassegrain.** — Le télescope de Cassegrain

Fig. 28.



(*fig.* 28) diffère du précédent en ce que le petit miroir est con-

vexe et placé au delà du foyer F, de telle façon que ce foyer F soit entre le petit miroir et son foyer f. Le petit miroir donne, de l'image virtuelle F, une image réelle qui peut, comme dans le télescope de Grégory, se trouver en F′, un peu au delà du grand miroir et que l'on regarde au moyen d'un oculaire. Cette dernière image est renversée.

CHAPITRE VII.

PENDULES, CHRONOMÈTRES. — NIVEAU, VERNIER, MICROSCOPE MICROMÉTRIQUE. — CERCLE MÉRIDIEN, ÉQUATORIAL. — DESCRIPTION SOMMAIRE DE L'ÉQUATORIAL COUDÉ, DE L'ALTAZIMUT, DU SEXTANT, DE L'HÉLIOMÈTRE.

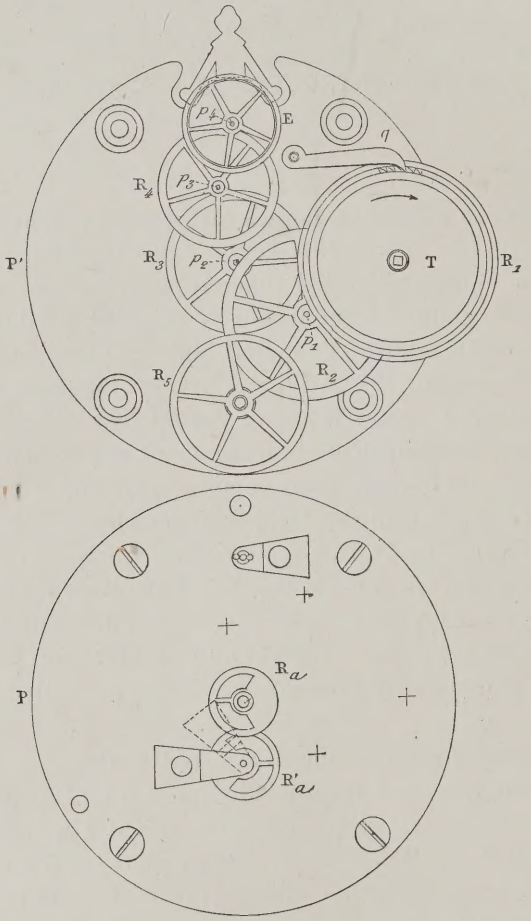
152. **Notions générales sur les instruments servant à mesurer le temps.** — Les instruments employés aujourd'hui à la mesure du temps sont composés d'un appareil produisant un mouvement sensiblement uniforme, dit *appareil réglant*, et d'un appareil moteur destiné à rendre à l'appareil réglant le mouvement que les frottements peuvent lui faire perdre. C'est l'appareil réglant qui doit être regardé comme la partie essentielle. A la rigueur, pour un intervalle peu considérable, on pourrait se passer de l'appareil moteur. Dans les horloges astronomiques, le moteur est un poids, et l'appareil réglant un pendule; dans les chronomètres, le moteur est un ressort, et l'appareil réglant un balancier combiné avec un second ressort, dit *spiral réglant*. Dans les horloges du commerce, on trouve des combinaisons dans lesquelles le moteur est un ressort, et l'appareil réglant un pendule. Nous ne décrirons ici que les pendules astronomiques et les chronomètres.

153. **Pendules astronomiques. Appareil moteur.** — Les *fig.* 29 et 29 *bis* représentent la projection, sur un plan parallèle au cadran, des diverses pièces qui constituent l'appareil moteur d'une pendule construite par M. Fénon pour la salle méridienne de l'Observatoire de Toulouse; la *fig.* 31 représente en coupe un développement linéaire de ce même appareil. La *fig.* 30 représente l'ensemble de la pendule.

Les diverses roues ont leurs axes perpendiculaires à deux plaques parallèles P, P′, reliées invariablement l'une à l'autre. Le cadran C est parallèle à ces mêmes plaques et leur est aussi invariablement fixé.

Dans la *fig.* 29, on a projeté sur la plaque P′ les pièces comprises entre P et P′, et dans la *fig.* 29 *bis*, on a projeté sur la plaque P les pièces comprises entre cette plaque P et le cadran C.

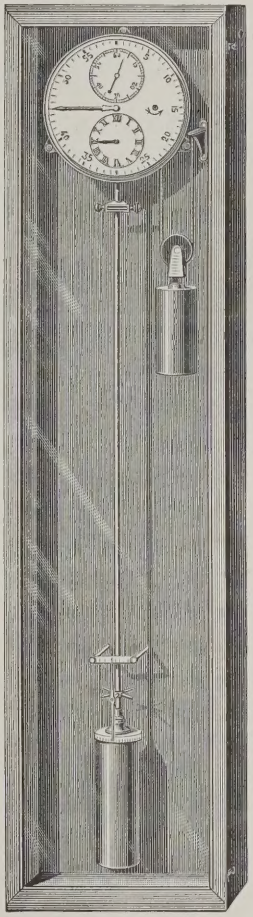
Fig. 29 et 29 *bis*.



Sur un tambour T s'enroule une corde convenablement attachée à ce tambour par une de ses extrémités. L'autre extrémité porte le poids moteur. A ce tambour est invariablement liée une roue dentée R_1 de 144 dents, qui engrène avec un pignon p_1 de 16 dents. L'axe de ce pignon porte une roue dentée R_2, munie

de 124 dents, laquelle engrène avec un pignon p_2 muni de 14 dents, dont l'axe porte, comme il sera expliqué plus loin, un carré Q_1, sur lequel se place l'aiguille des minutes. Cet axe porte une roue R_3, munie de 112 dents, engrénant avec un pignon p_3 muni de 14 dents, de sorte que ce pignon p_3 fait 8 tours pendant que l'aiguille des minutes en fait un. L'axe du pignon p_3 porte une roue R_4, munie de 105 dents, qui engrène avec un pignon p_4 qui en a 14. Pendant que la roue R_4 fait 2 tours, le pignon p_4 en fait 15, et, par conséquent, pendant que l'aiguille des minutes fait 1 tour, l'axe du pignon p_4 en fait 60. Cet axe porte à son extrémité *s* l'aiguille des secondes.

Fig. 30.



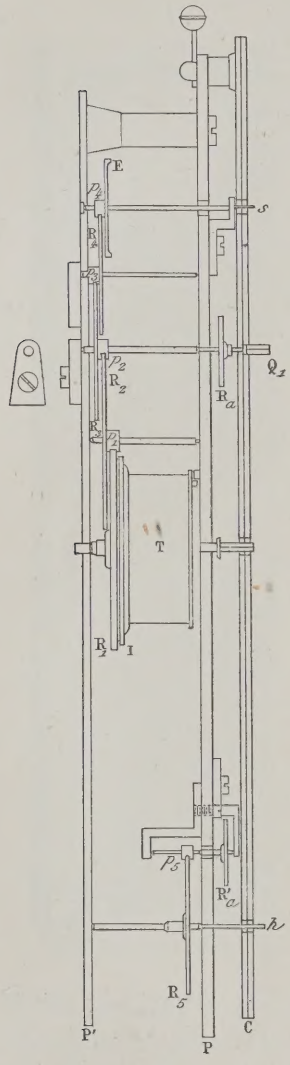
L'axe de l'aiguille des secondes porte aussi une roue E, dite *roue d'échappement,* qui relie l'appareil moteur à l'appareil réglant, comme il sera expliqué plus loin.

Indépendamment des roues et pignons mentionnés ci-dessus, l'appareil moteur en comprend encore d'autres, destinés à faire marcher l'aiguille des heures. A cet effet, l'axe du pignon des minutes porte une roue R_a engrénant avec une autre roue R'_a, de même grandeur et du même nombre de dents. L'axe de la seconde R'_a porte un pignon p_5, muni de 10 dents, qui engrène avec une roue R_5 qui en porte 120. L'extrémité *h* de l'axe de cette roue porte l'aiguille des heures. Il est manifeste que, quel que soit le nombre des dents des roues R_a, R'_a, l'axe de l'aiguille des heures tourne douze fois moins vite que l'axe de l'aiguille des minutes.

La roue R_a tient sur l'axe du pignon p_2 à frottement doux. C'est

elle qui porte le carré Q_1. De cette façon, le mouvement du tambour produit par le poids moteur se transmet à l'aiguille des heures, le frottement doux de la roue R_a sur l'axe du pignon p_2 étant suffisant, en raison de la faible résistance opposée par le mouvement des roues R'_a et R_5, et de la légèreté de l'aiguille des heures. Mais, si l'on fait tourner avec le doigt l'aiguille des minutes, la roue R_a tourne librement sur l'axe du pignon p_5. L'aiguille des heures seule est entraînée, ce qui permet la remise à l'heure.

Fig. 31.



Les trois aiguilles sont représentées sur la *fig.* 32, qui donne l'aspect du cadran.

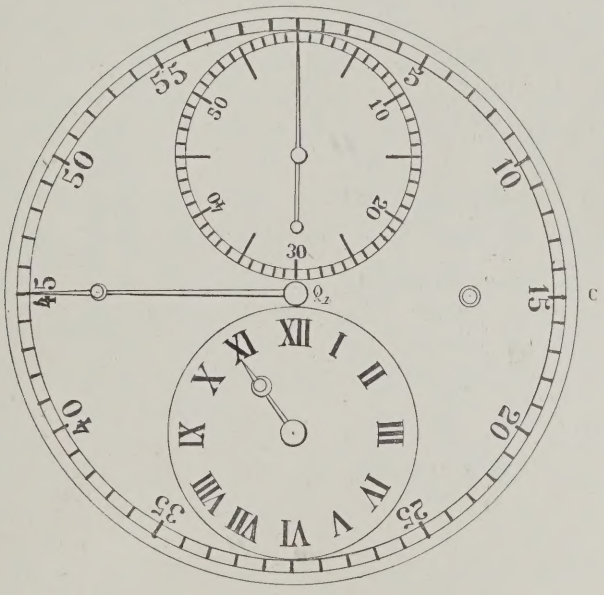
Dans la plupart des horloges du commerce, on a ramené les trois aiguilles à avoir le même centre. On conçoit aisément que, dans une pendule de haute précision, il importe de diminuer, autant que possible, le nombre des pivots, des pignons et des roues.

154. Remontage de la pendule. — On remonte le poids en tournant le tambour en sens inverse de celui dans lequel la corde se déroule. Ce mouvement arrêterait la marche de la pendule si l'on ne disposait pas un mécanisme tel qu'une autre force, pendant le remontage, pût actionner les rouages. Les choses sont disposées comme nous allons l'expliquer.

Les quatre parties α, β, γ, δ de la *fig.* 33 représentent les détails du tambour T. En β, on voit une coupe de la pièce la plus volumineuse de ce tambour, sur laquelle s'enroule la corde qui porte le poids moteur. L'axe invariablement fixé à

la pièce β se termine par un carré H, qui sert à faire tourner le tambour pour le remontage, au moyen d'une clef carrée. Sur la *fig.* 29, ce carré est représenté, et est en avant de la figure. On voit qu'à sa face postérieure, le tambour est creusé. Dans la cavité se loge une roue d'encliquetage D, fixée au tambour au moyen de 3 vis, telles que F.

Fig. 32.



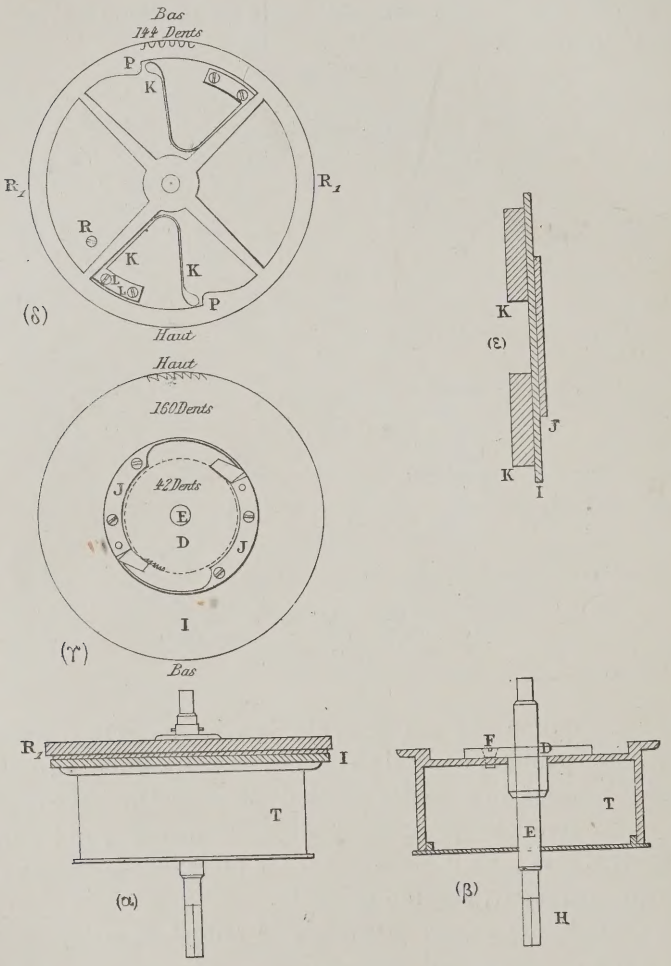
La *fig.* α donne une vue de profil du tambour. On a placé en arrière de ce tambour une roue d'encliquetage I, munie de 160 dents tournées en sens inverse des dents de la roue D. Cette roue est libre sur le pivot. En arrière est placée la roue R_1, qui compte 144 dents. Cette roue, libre aussi sur le pivot, est maintenue par un chapeau assujetti par une goupille.

On a représenté en α et β le mode de rattachement des roues I et R_1 l'une à l'autre et au tambour T.

γ représente la face antérieure de la roue I. Deux ressorts en demi-cercle J, fixés par des vis à cette face antérieure, sont terminés par de petites pièces qui pénètrent dans les dents de la roue D, que l'on a représentée aussi en ponctué dans cette figure γ, pour plus de clarté, et forment encliquetage. Si le tambour tourne

dans le sens de la flèche (*fig.* 29), la roue D, qui lui est invariablement liée, entraîne les pièces qui terminent les ressorts J et, par suite, la roue I.

Fig. 33.



En δ, on a représenté la roue R_1 qui est censée superposée à la face postérieure de la roue I. A cette face sont fixés, par des vis L, des ressorts K recourbés qui se logent entre les bras de la roue R_1. Les extrémités de ces ressorts K viennent buter contre des saillies intérieures P de la roue R_1. Ces ressorts tendent à

faire tourner la roue R_1 ; mais son mouvement est limité par une cheville R qui vient buter contre un bras de la roue R_1. Ce mouvement de la roue R_1 tend à se faire dans le sens de la flèche, c'est-à-dire dans le sens suivant lequel le poids moteur tend à faire tourner le tambour, et c'est ce qui arrive quand on remonte le poids moteur. On a, en effet, disposé un cliquet q qui pénètre dans les dents de la roue I et qui la rend immobile pendant le remontage, de sorte que, cette roue étant immobile, les ressorts K, qui, comme on va le voir, sont toujours tendus, font tourner la roue R_1.

Quand le poids moteur descend, il entraîne la roue I dans le sens de la flèche et, par suite, tend les ressorts K autant que le permet la cheville R.

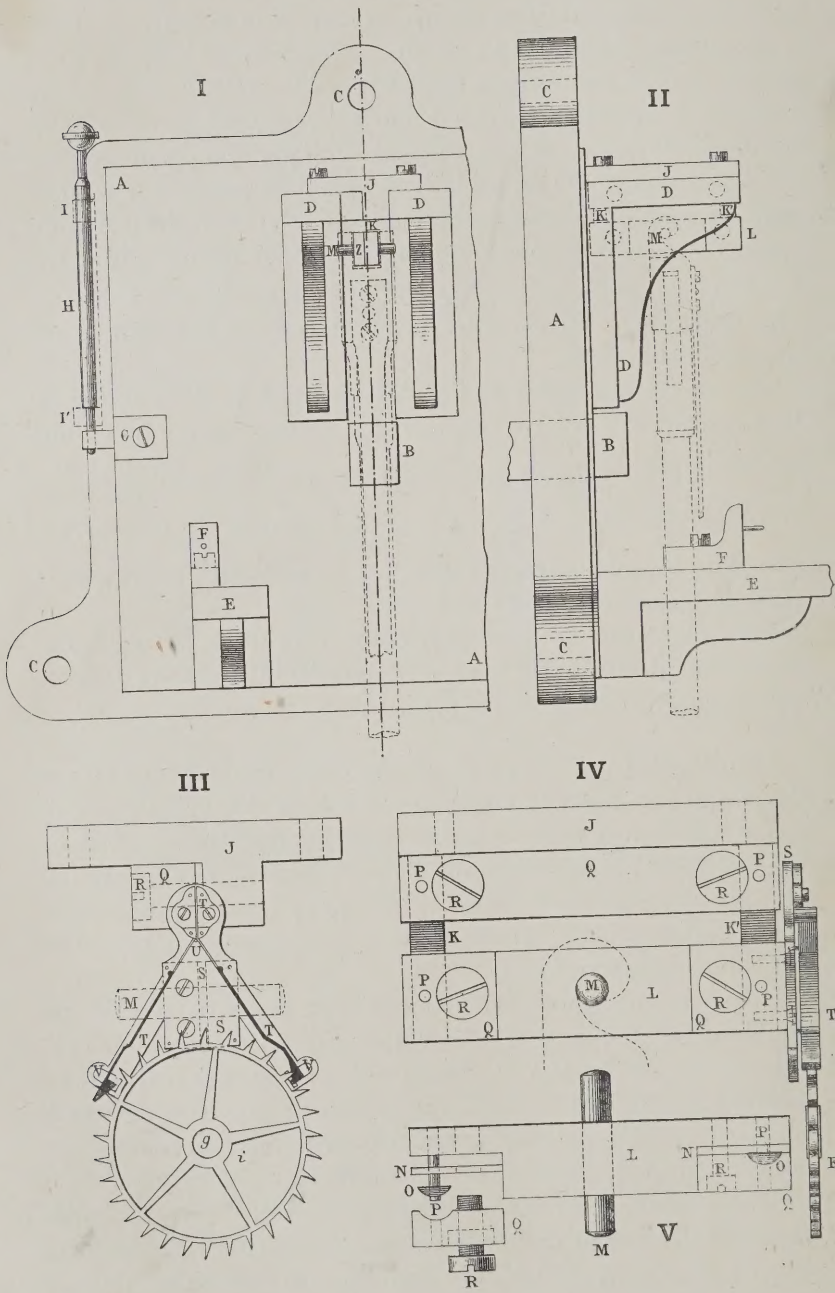
On comprendra que la tension des ressorts K suffise à entretenir le mouvement pendant le remontage, si l'on remarque qu'en une minute le pignon p_2 fait $\frac{1}{60}$ de tour, le pignon p_1 en fait $\frac{1}{60} \times \frac{14}{124}$, et le tambour en fait $\frac{1}{60} \times \frac{14}{124} \times \frac{16}{144}$, environ $\frac{1}{5000}$ de tour. On aura donc bien eu le temps d'effectuer le remontage avant que la tension des ressorts K ait disparu.

On a représenté en ε une projection en profil de la roue I, des ressorts J qu'elle porte à sa face antérieure et des ressorts K qu'elle porte à sa face postérieure.

155. **Pendule.** — L'appareil réglant est un pendule formé d'une tige rigide en acier, terminée par une bouteille cylindrique de même métal dans laquelle est une certaine quantité de mercure. Le coefficient de dilatation du mercure étant environ seize fois plus grand que celui de l'acier, il n'est pas nécessaire que la hauteur du mercure dans la bouteille soit bien grande pour que l'on obtienne la compensation.

La partie supérieure de la tige d'acier est terminée par un double crochet qui permet de suspendre le pendule à une cheville M, ainsi qu'on le voit dans les diverses parties I, II, III, IV de la *fig.* 34. Cette cheville M traverse une pièce rectangulaire L aux deux extrémités de laquelle sont pressées, au moyen d'un dispositif approprié, deux lames minces K, K′ d'acier, formant ressorts. Ces lames sont fixées de la même manière, à leurs extrémités supérieures, à une pièce J fixée sur deux supports D, faisant corps avec un support général A reposant, par son centre, sur un cro-

Fig. 34.



chet B en fer forgé, scellé dans le pilier de la pendule. Le support général est orienté au moyen de vis pénétrant dans des trous taraudés C et dont l'une se termine par une pointe qui s'engage dans un trou pratiqué dans l'un des goujons de butée scellés, comme le crochet D, dans le pilier de la pendule.

Les parties les plus délicates et les plus importantes de cet ensemble sont les attaches des lames K, K′, soit à la pièce L, soit à la chaise J. L'une d'elles est représentée démontée à gauche de la *fig.* V, et en place à droite de la même figure. P est une cheville d'acier faisant corps avec la pièce L. Cette cheville traverse successivement trois pièces libres : une plaque N d'acier trempé, la lame K du ressort, un segment O en acier trempé. Après quoi la cheville P traverse encore une presse Q, qui serre tout le système au moyen d'une forte vis R pénétrant dans la pièce L. De cette façon, le ressort est pressé et non pas suspendu à la cheville P, ce qui aurait le grave inconvénient que, sous l'action du poids assez considérable du balancier, le trou par lequel la cheville P traverse la lame K s'allongerait, et la longueur du pendule s'accroîtrait avec le temps.

156. **Échappement de Reid.** — L'organe intermédiaire entre l'appareil moteur et l'appareil réglant est l'échappement.

Cet organe, le plus délicat de tous ceux qui constituent la pendule, est formé de la roue d'échappement E des *fig.* 32 et 33, dont les dents ont la forme générale indiquée sur la *fig.* 33, III. Une platine en acier S est fixée par deux vis et deux pieds à l'extrémité de la pièce L. Sur cette platine sont montés deux ressorts T, dont les extrémités sont garnies de saphirs sur lesquels glissent les dents de la roue E. Le centre de flexion des ressorts T coïncide en U avec celui des lames K, K′. Pour limiter la pression exercée par les ressorts T sur les dents de la roue *g*, leur course est limitée par des chevilles en or montées en dessous des saphirs des extrémités et mobiles dans les ouvertures V, V′ pratiquées dans la platine S. Ces chevilles en or, au point le plus bas, reposent sur des saphirs chaussés dans la platine S à la base des ouvertures V, V′, de façon qu'il n'y ait pas d'adhérence entre ces chevilles et la platine. A chaque oscillation du pendule, l'extrémité de chacun des ressorts T passe d'une dent à une autre. Le balan-

cier reçoit une impulsion presque insensible qui suffit à conserver aux oscillations leur amplitude. Les oscillations du balancier sont ainsi isochrones et le mouvement de l'appareil moteur uniforme.

L'échappement de Reid, que nous venons de décrire, marche sans huile. Il est le plus parfait que l'on puisse employer.

157. **Chronomètres. Balancier compensateur. Spiral réglant.** — Il nous suffira ici d'indiquer les différences essentielles entre les chronomètres et les horloges. Comme nous l'avons déjà dit au n° 154, le poids moteur est remplacé par un ressort. D'autre part, le pendule est remplacé par un balancier animé d'un mouvement oscillatoire au moyen d'un ressort dit *spiral réglant*. Nous n'aurons rien à dire des rouages, qui ne diffèrent de ceux des horloges par rien d'essentiel. L'échappement ne peut naturellement avoir identiquement la même forme. On lui a donné, dans les montres et chronomètres, bien des formes diverses. Nous décrirons l'échappement libre à détente.

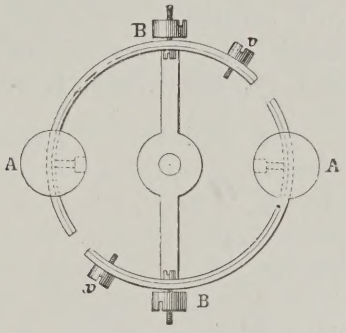
Le mouvement du balancier est produit par un ressort spiral attaché par un bout au bâti du chronomètre, par l'autre au balancier. Celui-ci, tournant dans un sens convenable, enroule le spiral dont la résistance croissante arrête le balancier, puis le ramène en arrière. Quand le balancier est à sa position primitive, ainsi que le spiral, il la dépasse, déroule le spiral dont l'élasticité arrête de nouveau le balancier, puis le ramène de nouveau, et ainsi de suite.

La durée des oscillations dépend ordinairement de leur amplitude, qui varie avec la température, avec l'état des huiles, avec la force motrice, etc. On a pu rendre cette durée indépendante de l'amplitude en donnant au spiral réglant une longueur convenable, ou en terminant ce spiral par certaines courbes.

Le balancier compensateur est un anneau formé de deux métaux inégalement dilatables : intérieurement de l'acier, extérieurement du cuivre jaune. Il est traversé par une lame d'acier dite *barrette*, percée en son centre d'un trou où passe l'axe de rotation terminé par des pivots très finement travaillés qui reposent sur des *trous* formés de pierres dures, rubis ou diamants, dans lesquels on met une gouttelette d'huile très fine. Ce balancier est coupé en deux points opposés, de telle sorte qu'il est formé de

deux arcs voisins du demi-cercle, fixés chacun à une extrémité de la barrette. Chacun de ces arcs porte une masse métallique A voisine de la coupure (*fig.* 35).

Fig. 35.



Si la température s'élève, l'acier étant moins dilatable que le cuivre, chacun des demi-anneaux se courbe davantage, et la masse qu'il porte se rapproche du centre. Les oscillations deviendraient plus rapides. Mais, en même temps, la force élastique du ressort diminue, ce qui rend le mouvement plus lent. On conçoit qu'il puisse y avoir compensation. L'action des masses A dépend manifestement de leur position sur l'anneau, et l'on obtient la compensation rigoureuse par tâtonnements en déplaçant convenablement les masses A.

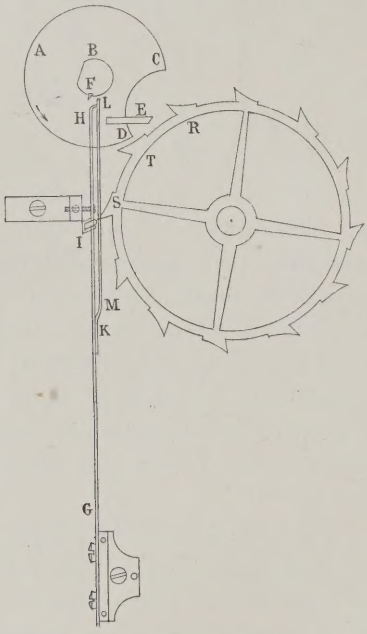
Aux extrémités de la barrette, on place des masses B fixées par des vis qui permettent de les rapprocher ou de les éloigner plus ou moins du centre. Ces masses, qui n'influent pas sur la compensation, permettent le réglage en rendant le mouvement plus ou moins rapide.

158. Échappement libre. — Le mouvement oscillatoire du balancier se transmet au rouage par l'intermédiaire de la roue d'échappement (*fig.* 36).

Sur l'axe du balancier sont montés un cercle A évidé assez profondément de C en D, et un rouleau B. Le cercle A porte un long rubis E, et le rouleau B un rubis F dont on expliquera plus loin l'usage.

A la platine du chronomètre est fixé un ressort détente GH, aminci à son extrémité G, et recourbé en forme de crosse à l'extrémité H. Ce ressort est pourvu en I d'une partie d'acier dans laquelle est encastré un rubis sur lequel viennent reposer successivement les dents de la roue d'échappement R. Au ressort détente GH est fixé en K un second ressort très peu résistant KL, recourbé en M de manière à courir à peu près parallèlement au ressort détente et s'appuyer librement en L sur son extrémité.

Fig. 36.



Le fonctionnement de cet ensemble apparaît de lui-même. La roue R, sous l'action du ressort moteur, tend à tourner de R vers S. La dent S repose sur le rubis I qui s'oppose au mouvement. Cependant le balancier, par l'action du spiral réglant, tourne alternativement dans les deux sens, et entraîne avec lui le cercle A et le rouleau B. Supposons que, la position du balancier correspondant à la figure, le mouvement entraîne le cercle et le rouleau dans le sens de la flèche. Le rubis F soulèvera le ressort ML, passera à droite de ce ressort, et rien ne sera modifié. Dans le mouvement

inverse, le rubis F butant contre le ressort ML, le soulève et soulève en même temps le ressort détente GH. Le rubis I s'écarte et la dent S échappe. En même temps, la dent R tombe sur le rubis E, le repousse, et donne ainsi au cercle A, et, par suite, au balancier, une impulsion qui lui restitue la vitesse que le choc du rubis F contre le ressort ML et les frottements lui ont fait perdre. Puis, le ressort détente reprenant sa position primitive, la dent T vient à son tour reposer sur le rubis I.

159. **Ressort moteur.** — Le ressort moteur est un long ruban d'acier, travaillé de telle manière qu'il s'enroule de lui-même en spiral. Il est enfermé dans un barillet cylindrique, attaché par une de ses extrémités à un arbre fixe concentrique au barillet, et par l'autre au pourtour du barillet. Si l'on fait tourner ce barillet de façon à enrouler le ressort, on augmente la courbure, et, par suite, le ressort tend à se dérouler en faisant tourner le barillet en sens inverse.

Ce barillet remplace le tambour sur lequel s'enroule la corde du poids moteur d'une horloge à poids. Il est naturellement relié au rouage par une combinaison semblable à celle qui a été décrite pour les horloges (§ 154), de façon que l'on puisse remonter le chronomètre sans arrêter le mouvement.

Mais on remarque de suite qu'à mesure que le ressort moteur se déroule, sa force devient moindre, de sorte que l'impulsion reçue par le balancier à chaque échappement diminue. On remédie en partie à cet inconvénient par l'introduction d'une fusée.

La fusée, établie à côté du barillet, est une sorte de tambour conique sur lequel est établi un gradin en hélice. Une chaîne fixée par une extrémité à la surface du barillet, par l'autre sur celle de la fusée, est enroulée sur les deux surfaces. A mesure que le déroulement du ressort fait tourner le barillet, la chaîne s'enroule sur le barillet et fait tourner la fusée. Au début, quand le ressort moteur a toute sa force, la chaîne agit vers le sommet de la fusée à une petite distance de l'axe. Plus tard, quand la force du ressort a diminué, la chaîne agit vers la base de la fusée à une plus grande distance de l'axe, et les choses sont calculées de telle manière que le moment O de la force qui sollicite la fusée soit constant.

C'est, bien entendu, la fusée qui communique le mouvement au rouage par l'intermédiaire d'un tambour monté sur le même axe et semblable à celui qui sert à remonter les horloges.

160. Considérations générales sur les instruments servant à déterminer les coordonnées des astres. — Dans tous les instruments aujourd'hui employés à l'observation des astres, la direction de l'astre est déterminée en faisant coïncider avec cette direction l'axe optique d'une lunette astronomique. Cet axe optique est la droite qui joint le centre optique de l'objectif, ou plus exactement son second point principal au point de croisement de deux fils très fins tendus dans le plan focal principal. Dans certains cas, la lunette astronomique est remplacée par un télescope à miroir.

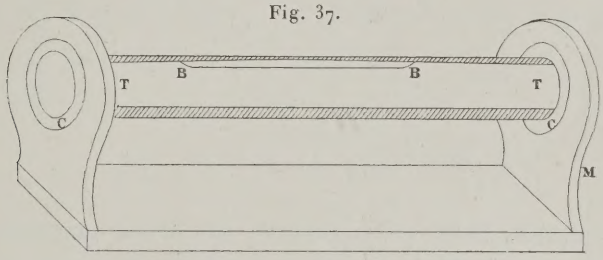
Il reste à déterminer les coordonnées de l'axe optique de la lunette, et à cet égard divers moyens sont employés. Il serait inutile, pour l'objet que nous nous proposons, de faire la théorie complète de tous les instruments employés en Astronomie, en Géodésie, ou en mer. Nous expliquerons, avec tous les détails nécessaires, l'emploi des instruments fondamentaux de l'Astronomie, la lunette méridienne, le cercle méridien, l'équatorial. Nous indiquerons comment on peut déterminer les erreurs instrumentales ou, comme on les appelle, *les constantes instrumentales,* et comment, les ayant déterminées, on peut corriger de leur effet les observations, et déduire des résultats des mesures les coordonnées des astres.

Nous devrons pour y parvenir nous occuper préalablement de la mesure des inclinaisons par le niveau à bulle d'air, de la mesure des angles au moyen des cercles divisés, et de la mesure des petites longueurs au moyen du micromètre.

En ce qui concerne les autres instruments, nous nous bornerons à une description de l'équatorial coudé, de l'altazimut, du sextant, de l'héliomètre, suffisante pour en faire comprendre le fonctionnement. Le détail des formules de réduction applicables à ces instruments et de la détermination de leurs constantes sortirait entièrement du cadre que nous nous sommes tracé. Les théories de l'équatorial et de l'instrument méridien suffisent pour donner aux étudiants des idées exactes sur les précautions que nécessite l'emploi des instruments de précision.

161. Niveau à bulle d'air. — Le niveau à bulle d'air est formé d'un tube cylindrique horizontal TT dont les génératrices intérieures dans le voisinage de la génératrice la plus élevée sont rodées en forme d'arc de cercle. Ce tube a été fermé à la lampe après qu'on l'a rempli d'un liquide très mobile tel que l'éther. Le liquide ne remplit pas tout à fait le tube, de sorte qu'une bulle de vapeur BB se place toujours au point le plus haut.

Fig. 37.



Le tube est maintenu, au moyen de cales en liège ou en papier CC, dans une monture métallique M dont la base est sensiblement parallèle aux génératrices intérieures du tube et, en particulier, à la tangente menée au milieu de l'arc fourni par la génératrice la plus élevée. Des vis que l'on n'a pas représentées sur la figure permettent de déplacer verticalement une des extrémités du tube T de manière à satisfaire très approximativement à cette condition.

Dans les instruments d'Astronomie, la monture métallique est liée à deux supports perpendiculaires d'égale longueur.

La génératrice rodée a été divisée en parties d'égales longueurs que nous supposerons numérotées d'une extrémité à l'autre. La longueur de la bulle, si le niveau est très sensible, comprend un assez grand nombre de ces parties.

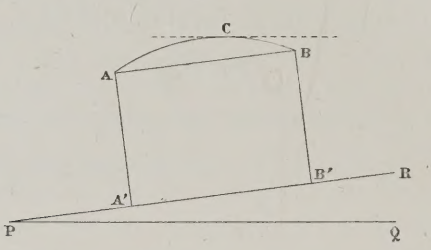
162. Déterminer au moyen d'un niveau l'inclinaison d'une droite sur laquelle le niveau peut reposer. — Soient (*fig.* 38)

PR cette droite;
A′A, B′B les supports du niveau de longueur a, b;
ACB la génératrice rodée;
C le point le plus haut;
L la corde AB;
L′ la distance A′B′.

Soient

PQ une horizontale;
α l'angle que fait PQ avec PR;
x l'angle que fait AB avec PQ.

Fig. 38.



En écrivant que les projections de A'AB et de A'B'B sur une perpendiculaire à PQ sont égales, on a la relation

$$a\cos\alpha + \mathrm{L}\sin x = \mathrm{L}'\sin\alpha + b\cos\alpha, \tag{1}$$

attendu qu'il est aisé de faire AA' et BB' très exactement perpendiculaires à A'B', tandis qu'il est beaucoup plus difficile de faire $a = b$, les points A et B étant en quelque sorte inconnus.

On a aussi

$$\mathrm{L}'^2 = \mathrm{L}^2 - (b-a)^2,$$

d'où

$$\frac{\mathrm{L}'}{\mathrm{L}} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{\mathrm{L}}\right)^2.$$

Nous regarderons α, x, $\frac{b-a}{\mathrm{L}}$ comme de petites quantités du premier ordre, et négligerons les termes du troisième ordre, ce qui est toujours permis même dans des instruments construits grossièrement, puisque le cube d'un arc d'un degré est sensiblement une seconde. La formule (1) devient ainsi

$$x = \alpha + \frac{b-a}{\mathrm{L}}.$$

Si l'on retourne le niveau bout à bout et que l'on désigne par x' le nouvel angle x, on a

$$x' = \alpha - \frac{b-a}{\mathrm{L}}.$$

Cela posé, soit $2l$ la longueur de la bulle, λ la lecture qui correspond au milieu de la bulle quand la corde AB est horizontale. Admettons que dans la première position du niveau les lectures augmentent de gauche à droite.

Si AB était horizontale, les lectures des deux extrémités seraient

$$\lambda - l, \quad \lambda + l.$$

Si AB se relève de l'angle x, et que ϖ soit la valeur angulaire d'une partie, les lectures augmentent de $\frac{x}{\varpi}$.

Désignant par A et B ces lectures, on a donc

$$A = \lambda - l + \frac{x}{\varpi}, \qquad B = \lambda + l + \frac{x}{\varpi}.$$

Dans la seconde position du niveau, A′ et B′ désignant les lectures faites aux extrémités A et B, on a

$$A = \lambda + l - \frac{x'}{\varpi}, \qquad B' = \lambda - l - \frac{x'}{\varpi}.$$

Remplaçant x et x' par leurs valeurs, on a donc

$$A = \lambda - l + \frac{\alpha}{\varpi} + \frac{b-a}{L\varpi},$$

$$B = \lambda + l + \frac{\alpha}{\varpi} + \frac{b-a}{L\varpi},$$

$$A' = \lambda + l - \frac{\alpha}{\varpi} + \frac{b-a}{L\varpi},$$

$$B' = \lambda - l - \frac{\alpha}{\varpi} + \frac{b-a}{L\varpi}.$$

On en tire

$$\frac{\alpha}{\varpi} = \frac{1}{4}(A + B - A' - B'),$$

$$l = \frac{1}{4}(A' + B - A - B'),$$

$$\lambda + \frac{b-a}{L\varpi} = \frac{1}{4}(A + B + A' + B').$$

163. Déterminer au moyen d'un niveau l'inclinaison d'un axe de rotation. — L'axe de rotation est une ligne idéale joignant les centres de deux cercles r_1, r_2 nommés *tourillons*. Nous supposerons que les tourillons reposent sur deux coussinets taillés en

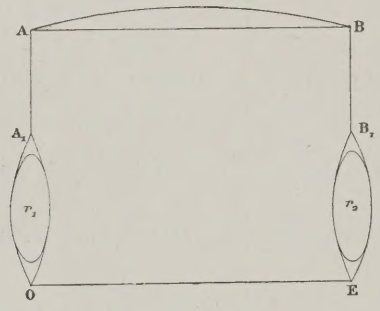
forme de V et que les supports du niveau se terminent de la même manière par deux V, A_1B_1.

Soient (*fig.* 39)

$2i_o$ et $2i_e$ les angles des V des coussinets O, E, ouest et est;
r_1 et r_2 les rayons des tourillons;
AB le niveau;
a et b les longueurs AA_1, BB_1 des supports;
$2i_a$ et $2i_b$ les angles des V de ces supports.

Soit α l'angle que fait l'arête OE des coussinets avec l'horizon, x l'inclinaison de AB.

Fig. 39.



On a, en parties du rayon, d'après le paragraphe précédent,

$$x = \alpha + \frac{BE - AO}{L}$$

et, par suite,

$$x = \alpha + \frac{b-a}{L} + \frac{1}{L}\left(\frac{r_2}{\sin i_b} + \frac{r_2}{\sin i_e} - \frac{r_1}{\sin i_a} - \frac{r_1}{\sin i_o}\right).$$

Retournons le niveau, nous aurons

$$x' = \alpha - \frac{b-a}{L} + \frac{1}{L}\left(\frac{r_2}{\sin i_a} + \frac{r_2}{\sin i_e} - \frac{r_1}{\sin i_b} - \frac{r_1}{\sin i_o}\right).$$

Les lectures sont, dans le premier cas,

$$A = \lambda - l + \frac{x}{\varpi}, \qquad B = \lambda + l + \frac{x}{\varpi};$$

dans le second,

$$A' = \lambda + l - \frac{x'}{\varpi}, \qquad B' = \lambda - l - \frac{x'}{\varpi}.$$

On en conclut

$$M = \frac{1}{4}(A + B - A' - B') = \frac{\alpha}{\varpi} + \frac{1}{L\varpi}\left[\frac{1}{2}(r_2 - r_1)\left(\frac{1}{\sin i_a} + \frac{1}{\sin i_b}\right) + \frac{r_2}{\sin i_e} - \frac{r_1}{\sin i_o}\right].$$

Recommençons l'opération tout entière après avoir retourné la lunette de façon à placer à l'est le tourillon ouest et *vice versa;* nous aurons, en désignant par $A_1 B_1 A'_1 B'_1$ les nouvelles lectures

$$M_1 = \frac{1}{4}(A_1 + B_1 - A'_1 - B'_1) = \frac{\alpha}{\varpi} + \frac{1}{L\varpi}\left[-\frac{1}{2}(r_2 - r_1)\left(\frac{1}{\sin i_a} + \frac{1}{\sin i_b}\right) + \frac{r_1}{\sin i_e} - \frac{r_2}{\sin i_o}\right].$$

Ce n'est pas de l'angle α que l'on a besoin, mais de l'inclinaison de l'axe idéal de rotation défini, dans le premier cas, par la formule

$$\gamma = \alpha + \frac{1}{L}\left(\frac{r_2}{\sin i_e} - \frac{r_1}{\sin i_w}\right) = M\varpi - \frac{1}{2L}(r_2 - r_1)\left(\frac{1}{\sin i_a} + \frac{1}{\sin i_b}\right);$$

dans le second, par

$$\gamma_1 = \alpha + \frac{1}{L}\left(\frac{r_1}{\sin i_e} - \frac{r_2}{\sin i_w}\right) = M_1\varpi + \frac{1}{2L}(r_2 - r_1)\left(\frac{1}{\sin i_a} + \frac{1}{\sin i_b}\right).$$

On obtient les derniers termes comme il suit : on a

$$\frac{1}{2}(M - M_1) = \frac{1}{2L\varpi}(r_2 - r_1)\left(\frac{1}{\sin i_a} + \frac{1}{\sin i_b}\right) + \frac{1}{2L\varpi}(r_2 - r_1)\left(\frac{1}{\sin i_e} + \frac{1}{\sin i_o}\right).$$

Les deux termes du second membre sont sensiblement égaux, r_2 étant extrêmement voisin de r_1, et les angles i_a, i_b, i_e, i_o étant aussi égaux que possible. On a donc

$$\frac{1}{2L\varpi}(r_2 - r_1)\left(\frac{1}{\sin i_a} + \frac{1}{\sin i_b}\right) = \frac{1}{4}(M - M_1);$$

par suite,

$$\frac{\gamma}{\varpi} = M - \frac{1}{4}(M - M_1),$$

$$\frac{\gamma_1}{\varpi} = M_1 + \frac{1}{4}(M - M_1).$$

On a aussi

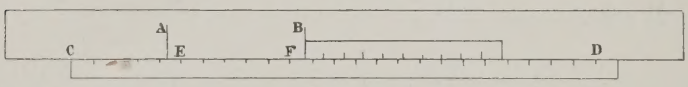
$$\alpha = \frac{M + M_1}{2} + \frac{1}{2L\varpi}(r_2 + r_1)\left(\frac{1}{\sin i_o} - \frac{1}{\sin i_e}\right),$$

et, comme les deux facteurs du dernier terme sont très petits,

$$\alpha = \frac{M + M_1}{2}.$$

164. Vernier. — Le procédé le plus simple, qui serve à mesurer la longueur d'une droite AB, consiste à placer le long de cette droite une règle CD (*fig.* 40) divisée en parties égales de longueur connue. On voit immédiatement le nombre entier des parties de la règle comprises entre A et B. Dans la figure on voit qu'il y a cinq parties. Il reste à apprécier les petites longueurs AE, BF. On peut le faire à la simple estime, et pratiquement si les parties de la règle ont 3^{mm} ou 4^{mm}, que les traits soient bien tracés, on apprécie aisément le dixième de partie.

Fig. 40.



Pour faciliter cette opération, on emploie une petite règle nommée *vernier,* mobile le long de la première et divisée en parties un peu plus petites.

Supposons que $p + 1$ parties du vernier soient équivalentes à p divisions de la règle. On amène le zéro du vernier en coïncidence avec le point B, et l'on regarde quelle division du vernier coïncide avec une division de la règle. Si c'est la division k, l'intervalle FB est égal à

$$\frac{k}{p+1},$$

une division de la règle étant prise pour unité. Il est, en effet, visible que si l'on revient des traits en coïncidence au point B, les écarts entre les traits du vernier et les traits suivants de la règle sont successivement

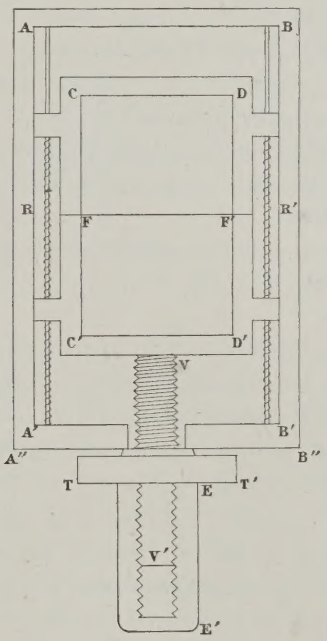
$$\frac{1}{p+1}, \quad \frac{2}{p+1}, \quad \frac{3}{p+1}, \quad \ldots, \quad \frac{k}{p+1}.$$

Il est manifeste qu'on pourra aussi bien adapter un vernier, comme index, à un cercle divisé. Le vernier aura la forme d'un arc de cercle de même rayon que le cercle lui-même.

Dans la pratique, le nombre p est choisi de telle manière que l'on voit toujours un trait du vernier en coïncidence avec un trait de la règle et que l'on n'en aperçoit pas deux. Dans certains cas, on apprécie la coïncidence avec une loupe.

165. **Micromètre.** — Le micromètre est l'instrument le plus précis qui serve à la mesure de petites longueurs. Il est formé d'un cadre rectangulaire AA'BB' (*fig.* 41) dont les faces inté-

Fig. 41.



rieures AA', BB' sont rigoureusement parallèles. Un second cadre CDC'D' glisse dans le premier. Il est invariablement lié à une vis VV' qui pénètre dans un écrou EE'. Cet écrou butte contre la face extérieure A''B'' du premier cadre et y est maintenu par des ressorts à boudin RR'. Le cadre CDC'D' porte un fil d'araignée FF' perpendiculaire aux arêtes AA', BB', et à l'axe de la vis VV'.

L'écrou porte un tambour TT′ mobile devant un index fixé à la boîte et qui indique la fraction de tour dont il a tourné. Au moyen d'un engrenage, un second tambour, supprimé dans la figure, indique aussi le nombre entier de tours.

Tout l'appareil est fixé perpendiculairement à l'axe d'un tube cylindrique qui tourne dans un autre tube cylindrique fixe. Le premier porte un cercle divisé en parties égales, dit *cercle de position,* et le second un index pour la lecture de ce cercle.

Pour mesurer la distance de deux points, on place l'instrument de façon que le fil passe par les deux points, et on le fait tourner, au moyen du cercle de position, de 90°. On amène ensuite, au moyen de l'écrou, le fil à coïncider successivement avec les deux points. La différence des lectures donne la distance des deux points évaluée en prenant la longueur du pas de vis pour unité.

On obtient cette dernière longueur en mesurant au moyen du micromètre une longueur connue.

Pour mieux apprécier la coïncidence du fil avec les points dont on veut mesurer la distance, on adapte au micromètre, en avant du fil, une loupe mobile.

Nous verrons comment le micromètre s'adapte aux divers instruments d'Astronomie.

166. **Lunette méridienne.** — Cet instrument, le plus simple des grands instruments d'Astronomie, et le plus précis, est formé d'une lunette astronomique mobile autour d'un axe de rotation perpendiculaire à son axe optique. Ce dernier est horizontal et dirigé exactement de l'est à l'ouest.

L'axe optique de la lunette est déterminé par l'intersection d'un fil horizontal et d'un fil perpendiculaire au premier, nommé *fil horaire.* Ces deux fils sont placés aussi près que possible du plan focal. Pratiquement le fil horizontal est fictif et également éloigné de deux fils parallèles très rapprochés l'un de l'autre.

Cette lunette tournant autour de son axe de rotation, son axe optique reste toujours dans le plan méridien, de sorte que, *l'ascension droite d'un astre est égale à l'heure sidérale au moment du passage de cet astre à l'astre optique,* et, par suite, au fil horaire.

On voit immédiatement qu'il est inutile de s'astreindre à faire

passer l'astre exactement au point où le fil horaire est coupé par le fil horizontal. On pourrait même observer le passage en tel point que l'on voudrait du fil horaire, si toutes les conditions imposées à l'instrument étaient rigoureusement réalisées. Mais elles ne le sont qu'approximativement, et, en fait, il convient de faire l'observation le plus exactement possible au point indiqué tout d'abord.

La lunette méridienne est nécessairement accompagnée d'une pendule sidérale, c'est-à-dire d'une pendule qui devait marquer 0^h toutes les fois que l'origine des ascensions droites (le point vernal) passe au méridien. Cette condition n'est jamais réalisée, et il est nécessaire de connaître la correction de la pendule. Si l'Astronomie était une science à créer, il serait nécessaire, toutes les fois que l'on voudrait déduire d'une observation de passage au méridien l'ascension droite d'un astre, de combiner le résultat obtenu avec une détermination du point vernal. Dans la pratique actuelle, il y a un certain nombre d'étoiles que l'on nomme *étoiles fondamentales* dont les ascensions droites sont bien connues. En observant une de ces étoiles on obtient l'état, la *correction* de la pendule, et l'on peut, de l'heure de la pendule observée pour le passage d'un astre au méridien, déduire l'heure sidérale de ce passage.

167. Relation entre les diverses constantes instrumentales. — Si parfait que soit l'instrument, son axe de rotation n'est pas exactement dirigé de l'est à l'ouest, n'est pas horizontal, et son axe optique n'est pas perpendiculaire à l'axe de rotation. Il est commode de représenter la position de l'axe de rotation par son azimut et sa hauteur, et aussi par son angle horaire et sa déclinaison. Nous considérerons spécialement la direction ouest de l'axe de rotation. Soient $90^\circ - k$ son azimut et b sa hauteur; $90^\circ - m$ son angle horaire, n sa déclinaison. Soit aussi φ la latitude de l'instrument.

Le triangle sphérique qui, sur la sphère céleste, a pour sommets le pôle, le zénith et l'extrémité ouest de l'axe de rotation donne entre ces cinq quantités, les relations

$$\sin n = \sin b \sin\varphi - \cos b \cos\varphi \sin k,$$
$$\cos n \sin m = \sin b \cos\varphi + \cos b \sin\varphi \sin k.$$

Dans les instruments bien construits, les angles m, n, k, b ne

dépassent pas 2″ à 3″ d'arc, et leurs carrés sont absolument négligeables, de sorte que ces formules donnent

$$(2)\qquad \begin{cases} n = b\sin\varphi - k\cos\varphi, \\ m = b\cos\varphi + k\sin\varphi. \end{cases}$$

On en conclut

$$(3)\qquad \begin{cases} k = m\sin\varphi - n\cos\varphi, \\ b = m\cos\varphi + n\sin\varphi. \end{cases}$$

168. **Déduire de l'heure observée l'angle horaire de l'astre.** — L'instrument n'étant pas installé d'une manière rigoureuse, l'astre, au moment de son passage au fil horaire, n'est pas rigoureusement au méridien. On détermine comme il suit son angle horaire à cet instant.

Soient

τ cet angle horaire compté positivement avant le passage de l'astre au méridien;

$90^\circ + f$ l'angle de l'axe optique avec la direction ouest de l'axe de rotation;

δ la déclinaison de l'astre observé.

Dans le triangle formé sur la sphère céleste par le pôle, l'extrémité ouest de l'axe de rotation et l'étoile, les côtés sont respectivement (*fig.* 42)

$$90^\circ + f, \qquad 90^\circ - n, \qquad 90^\circ - \delta,$$

et l'angle opposé au premier est $90^\circ - m + \tau$ s'il s'agit d'un passage supérieur et $90^\circ + m - \tau$ à un passage inférieur.

On a entre ces éléments la relation suivante :

$$\text{Premier cas....}\quad -\sin f = \sin\delta\sin n + \cos\delta\cos n\sin(m-\tau)$$
$$\text{Deuxième cas..}\quad -\sin f = \sin\delta\sin n - \cos\delta\cos n\sin(m-\tau)$$

On peut remarquer de suite que l'on passe de la seconde formule à la première en y remplaçant δ par son supplément, c'est-à-dire en comptant la déclinaison dans le méridien, au-dessus de l'horizon, en allant de l'équateur vers le pôle nord jusqu'à l'étoile. Nous pouvons donc ne conserver que la première formule qui donne

$$\sin(m-\tau) = \frac{-\sin f - \sin\delta\sin n}{\cos\delta\cos n}.$$

On déduit aisément de là

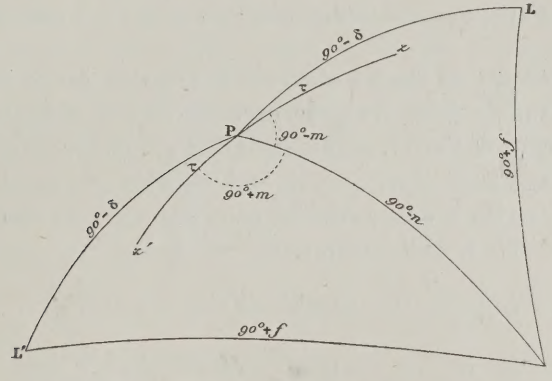
$$m - \tau = - \frac{\sin f + \sin n \sin \delta}{\cos n \cos \delta} - \frac{1}{6} \left(\frac{\sin f + \sin n \sin \delta}{\cos n \cos \delta} \right)^3 - \dots .$$

Tous les termes du troisième ordre sont très petits par rapport au premier d'entre eux

$$- \frac{1}{6} \frac{\sin^3 f}{\cos^3 n \cos^3 \delta},$$

n ne dépassant jamais $2''$ ou $3''$, tandis que f, pour des raisons qui seront indiquées plus loin, peut atteindre $30'$.

Fig. 42.



Si nous donnons à f cette valeur extrême, ce terme sera à peu près égal à

$$- \frac{1}{48} \frac{1''}{\cos^3 \delta}.$$

Il importe d'observer que la précision de l'observation est définie par le produit $(m - \tau) \cos \delta$, et que la partie de ce produit qui correspond au terme en f^3 est

$$- \frac{1}{48} \frac{1''}{\cos^2 \delta}.$$

On voit que pour $f = 30'$, le terme en f^3 jusqu'à $\delta = 89°$ ne dépassera pas $75''$, et les termes en $f^2 n$, $f n^2$, n^3 sont insensibles. On a donc

$$m - \tau = - n \operatorname{tang} \delta - f \sec \delta - \frac{1}{6} \frac{f^3}{\cos^3 \delta} + \frac{1}{6} \frac{f^3}{\cos \delta};$$

d'où

$$(4) \qquad \tau = m + n \operatorname{tang} \delta + f \operatorname{séc} \delta + \frac{1}{6} f^3 \frac{\sin^2 \delta}{\cos^3 \delta} + \dots .$$

Il est manifeste que si f était grand et δ très voisin de 90°, les termes en f^5 pourraient être sensibles. On s'astreint, pour les astres voisins du pôle, à faire f d'autant plus petit que δ diffère moins de 90°, de telle façon que le terme

$$\frac{1}{6} f^3 \frac{\sin^2 \delta}{\cos^3 \delta}$$

du produit $(\tau - m) \cos \delta$ ne dépasse jamais un petit nombre de secondes d'arc; tous les termes négligés sont alors insensibles.

169. **Déduire de l'heure observée l'ascension droite de l'astre.** — Si la pendule donnait rigoureusement l'heure sidérale t_s, l'ascension droite de l'astre, *au moment de l'observation,* serait, lors d'un passage supérieur, $t_s + \tau$, et lors d'un passage inférieur $t_s + 12^h + \tau$. On a donc, en désignant par α l'ascension droite à l'heure sidérale t_s de l'observation,

$$(5) \quad \begin{cases} \alpha = t_s + m + n \operatorname{tang} \delta + f \operatorname{séc} \delta + \frac{1}{6} f^3 \frac{\sin^2 \delta}{\cos^3 \delta} & \text{P.S.,} \\ \alpha = t_s + 12^h + m - n \operatorname{tang} \delta - f \operatorname{séc} \delta - \frac{1}{6} f^3 \frac{\sin^2 \delta}{\cos^3 \delta} & \text{P.I.} \end{cases}$$

On appelle *correction* C_p *de la pendule à un instant donné* l'intervalle de temps sidéral qu'il faut ajouter à l'heure t qu'elle indique pour avoir l'heure sidérale t_s. On a alors

$$t_s = t + C_p.$$

170. **Formules de réduction de Bessel, de Mayer, de Hansen.** — La formule de réduction (4) est due à Bessel. Avant cette formule, on employait une formule due à Mayer où entraient au lieu de m et n les constantes b et k. Si l'on remplace, dans la formule de Bessel, m et n en fonction de b et k au moyen des formules (2), on a la formule de Mayer

$$(6) \quad \alpha = t_s + b \frac{\cos(\varphi - \delta)}{\cos \delta} + k \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos \delta} + f \operatorname{séc} \delta + \frac{1}{6} f^3 \frac{\sin^2 \delta}{\cos^3 \delta}.$$

Si l'on remplace, dans la formule de Bessel, m par sa valeur en fonction de b et n, on a la formule de Hansen

$$(7) \qquad \alpha = t_s + b\,\sec\varphi + n(\operatorname{tang}\delta - \operatorname{tang}\varphi) + f\sec\delta + \frac{1}{6}f^3\frac{\sin^2\delta}{\cos^3\delta}.$$

Chacune de ces formules peut être avantageuse dans certains cas particuliers. Pour des étoiles équatoriales, l'erreur commise sur n est sans influence sensible quand on applique la formule de Bessel. Pour des étoiles zénithales, il en est de même de l'erreur commise sur n dans l'application de la formule de Hansen, de l'erreur commise sur k dans l'application de la formule de Mayer.

171. Emploi de plusieurs fils. — Le champ de l'instrument étant à l'ordinaire assez grand, souvent plus de un degré, on en profite pour placer une série de fils horaires qui sont généralement à peu près symétriques par rapport à l'axe de figure de la lunette. Si l'on désigne par c la moyenne des valeurs de f, par t_m la moyenne des temps observés, par C_p la correction de la pendule et que les termes du troisième ordre soient négligeables, on a visiblement, par l'ensemble des observations,

$$\alpha = t_m + C_p + m + n\operatorname{tang}\delta + c\sec\delta.$$

La constante c s'appelle la *collimation*. Elle est toujours très petite, de l'ordre de m, n, b, k, généralement inférieur à $1''$.

La valeur de α ainsi obtenue étant la moyenne de celles que fournissent les observations isolées, sa précision est égale à celle d'une observation isolée, multipliée par la racine carrée du nombre des fils.

172. Emploi d'un fil mobile. — Les fils horaires fixes, dont il vient d'être question, sont à une dizaine de secondes de temps l'un de l'autre, de manière à laisser à l'astronome le temps d'inscrire les observations dans les intervalles entre les passages successifs. Si la lunette est à la déclinaison δ, l'intervalle de temps qui s'écoule entre les passages à deux fils consécutifs est égal à l'intervalle équatorial, c'est-à-dire à la différence des valeurs de f, divisé par $\cos\delta$. Quand l'astre est voisin du pôle, cet intervalle de temps devient très long. On remédie à cet inconvénient en

plaçant vers l'oculaire un micromètre dont le fil se meut exactement dans le plan focal et est parallèle aux fils horaires.

En amenant le fil mobile à des positions successives convenables, on pourra multiplier les observations faites sur un astre voisin du pôle sans trop prolonger l'observation et sans trop s'écarter du méridien.

173. Distances des fils. — Le fil mobile sert tout d'abord à mesurer les distances des fils fixes. Pour cela, on l'amène en coïncidence successivement avec les divers fils fixes et l'on fait chaque fois la lecture du tambour. Les différences des lectures donnent les distances des fils exprimées en prenant pour unité le pas de la vis, ou comme on dit *le tour de vis*. La valeur angulaire r de ce pas de vis, exprimé en temps, est une constante instrumentale qui doit être déterminée avec le plus grand soin.

174. Formule de réduction pour les observations faites au fil mobile. — Soit v la lecture du tambour dans une position du fil mobile, v_0 la lecture qui correspond au fil fictif qui serait sans collimation. La valeur de f qui correspond à la lecture v est $(v - v_0)r$, et la formule de Bessel devient

$$\alpha = t + C_p + m + n \tang \delta + r(v - v_0) \sec \delta + \frac{1}{6} 225 r^3 (v - v_0)^3 \sin^2 1'' \frac{\sin^2 \delta}{\cos^3 \delta}.$$

Le terme du troisième ordre était, en effet,

$$\frac{1}{6} f^3 \frac{\sin^2 \delta}{\cos^3 \delta},$$

et, pour obtenir en temps le cube de f, il faut multiplier la valeur de f en temps, c'est-à-dire $r(v - v_0)$ par son carré en parties du rayon, c'est-à-dire par

$$[15 r(v - v_0) \sin 1'']^2.$$

Si, d'autre part, on désigne par v_m la lecture donnée par un fil fictif correspondant à la moyenne des lectures des fils fixes, on a

$$v_m = v_0 + \frac{c}{r},$$

et la formule ci-dessus devient

$$\alpha = t + C_p + m + n \operatorname{tang}\delta + c \operatorname{séc}\delta + r(\varphi - \varphi_m)\operatorname{séc}\delta + \frac{1}{6} 225 r^3 (\varphi - \varphi_m)^3 \sin^2 1'' \frac{\sin^2\delta}{\cos^3\delta},$$

l'erreur commise, en remplaçant dans le dernier terme φ_0 par φ_m, étant insensible.

175. Détermination des constantes instrumentales. — On détermine d'abord la valeur r d'un tour de la vis du fil mobile. Pour cela, on observe un certain nombre de fois une étoile voisine du pôle, très près du méridien, et l'on recommence les mêmes observations en retournant la lunette de telle façon que le tourillon est vienne à l'ouest, et *vice versa*.

On a, dans les deux positions, des équations de la forme

$$\alpha = t + C_p + m + n \operatorname{tang}\delta + c \operatorname{séc}\delta + r(\varphi - \varphi_m)\operatorname{séc}\delta + \frac{225}{6} r^3 (\varphi - \varphi_m)^3 \sin^2 1'' \frac{\sin^2\delta}{\cos^3\delta},$$

$$\alpha = t' + C_p + m + n \operatorname{tang}\delta - c \operatorname{séc}\delta - r(\varphi' - \varphi_m)\operatorname{séc}\delta - \frac{225}{6} r^3 (\varphi' - \varphi_m)^3 \sin^2 1'' \frac{\sin^2\delta}{\cos^3\delta}.$$

On résout ces équations en négligeant les termes du troisième ordre et regardant comme inconnues $\alpha - m - n \operatorname{tang}\delta - C_p$, c, r. Après quoi on utilise la valeur de r pour calculer les termes du troisième ordre, et l'on recommence la résolution des mêmes équations en tenant compte des termes du troisième ordre ainsi calculés. Il convient de déplacer le fil mobile d'un bout à l'autre du champ afin de n'avoir pas, pour la réduction des observations ultérieures, à multiplier r par un nombre plus grand que celui des tours qui ont servi à en obtenir la valeur.

La valeur de r obtenue, si l'on veut seulement trouver c, on opère de même, mais en n'employant au contraire qu'une très faible partie du champ. Au lieu d'opérer sur une étoile, on peut avantageusement pointer sur une mire un peu éloignée. Dans ce cas, la mire étant fixe, on peut faire $t' = t$ et l'on a

$$r\varphi_0 = -c + r\varphi_m = \frac{r}{2}(\varphi + \varphi'),$$

formule qui donne la collimation du fil moyen et la lecture du fil sans collimation.

Pour trouver les autres constantes, on mesure l'inclinaison comme il a été expliqué; ensuite on observe une étoile équatoriale, puis une polaire, puis une seconde étoile équatoriale d'ascensions droites connues (*fondamentales*). En désignant par t_1, t_2, t_3 les temps des observations, par μ la marche de la pendule dans l'unité de temps, par C_p sa correction au moment de la première observation, on a, avec une précision suffisante,

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= t_1 + C_{p_0} + m + c, \\ \alpha_2 &= t_2 + C_{p_0} + \mu(t_2 - t_1) + m \pm n \sec\delta \pm r(v - v_0)\sec\delta \\ \alpha_3 &= t_3 + C_{p_0} + \mu(t_3 - t_1) + m + c. \end{aligned}\right\} \begin{matrix} \text{P. S.,} \\ \text{P. I.,} \end{matrix}$$

La comparaison des deux observations extrêmes donne μ. La première donne $C_{p_0} + m$; la polaire donne n. Après quoi on a

$$\begin{aligned} k &= b\,\mathrm{tang}\,\varphi - n\sec\varphi, \\ m &= k\sin\varphi + b\cos\varphi. \end{aligned}$$

La mire permet de contrôler les constantes. Si, en effet, on désigne par ω son azimut, par v la lecture obtenue en faisant coïncider le fil mobile avec l'image de la mire, on a

$$\omega = k + r(v - v_0).$$

Si, un jour, on ne peut observer de polaire, la mire étant très stable donnera k, d'où avec b on conclura m et n. Après quoi deux étoiles horaires donneront μ et $C_p + m$.

176. **Emploi des cercles divisés.** — Dans les instruments d'Astronomie, on mesure d'ordinaire l'angle dont un axe de rotation a tourné, au moyen d'un cercle divisé dont le plan est perpendiculaire à cet axe, et dont le centre est sur l'axe. Ce cercle est invariablement lié à l'axe. Il tourne avec lui en face d'un index fixe ordinairement formé d'un microscope au foyer duquel est un fil parallèle aux traits de division du cercle. Dans certains cas, on *apprécie à l'estime* la fraction de division comprise entre ce fil et l'image de l'un des traits. Dans d'autres, on combine le microscope avec un micromètre comme il va être expliqué, ou encore on remplace ce microscope par un vernier.

177. **Microscope micrométrique.** — L'index le plus commode et le plus précis que l'on puisse employer pour un cercle divisé est un microscope pourvu d'un oculaire positif. On place ce microscope invariablement, devant la graduation du cercle, à une distance convenable. L'objectif du microscope donne une image de deux ou trois traits du cercle dans un plan focal où l'on place un micromètre. Les images des traits semblent être parallèles, ces traits étant très courts et leur angle ne dépassant pas 5′. Le fil du micromètre est parallèle aux traits. La position théorique de l'index est celle que prend le fil quand le tambour est au zéro. Pour faire la lecture, on amène le fil en coïncidence avec le trait le plus voisin et on lit le tambour. On a ainsi en tours et fractions de tour la distance du trait au zéro.

On a d'ailleurs aisément la valeur d'un tour en pointant successivement sur deux traits consécutifs du cercle. La différence des lectures donne le nombre de tours qui correspondent à un angle égal à l'intervalle de deux traits.

Pratiquement, on évite l'emploi d'un tambour pour compter le nombre entier de tours en plaçant, dans le plan focal, une sorte de crémaillère de dimension et de position telles que le fil passe par le fond d'une dent quand l'index est au zéro, et par le fond de la suivante quand la vis avance d'un pas. On a, au premier aspect, le nombre entier de pas, en comptant le nombre de dents compris entre le zéro et la position du fil. On compte des tours positifs si le fil vient vers la tête de vis, négatifs dans le cas contraire. Mais, dans la pratique, la fraction de tour est toujours prise positivement.

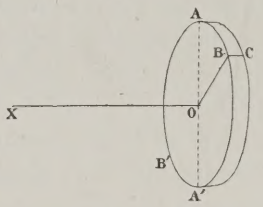
178. **Examen de diverses causes d'erreur.** — Si le cercle était rigoureusement perpendiculaire à l'axe de rotation, si le centre du cercle était exactement sur l'axe, l'angle dont l'axe tourne, en passant d'une position à une autre, serait égale à la différence des lectures obtenues dans les deux positions.

Si la première condition n'est pas exactement remplie, il ne résulte de l'écart, sur la lecture, qu'une erreur du second ordre. Soient, en effet (*fig.* 43), OX l'axe de rotation, ABB′ un cercle ayant pour centre le point O et dont le plan soit perpendiculaire à OX, ACA′ le cercle divisé, coupant le premier suivant un diamètre AA′.

Si du point C on mène sur la sphère un arc de grand cercle CB perpendiculaire à ABA′, l'angle AOC sera la différence des lectures obtenues quand l'axe tourne de l'angle AOB. Si α est l'angle des plans des deux cercles, on a

$$\text{tang AOB} = \text{tang AOC} \cos\alpha.$$

Fig. 43.



Il s'ensuit que AOB — AOC est de l'ordre de α^2. Dans la pratique, α ne dépasse pas 1′ dans un instrument bien construit, et son carré est négligeable.

Il en est de même de l'erreur qui pourrait résulter de ce que le microscope qui sert d'index n'aurait pas son axe optique rigoureusement parallèle à l'axe. L'erreur est représentée par le produit de BC par la tangente du petit angle que fait l'axe du microscope avec la parallèle à l'axe. Elle est encore du second ordre, et négligeable.

179. **Erreur d'excentricité.** — Il n'en est pas de même de l'erreur résultant de ce que l'axe géométrique de rotation ne passe pas exactement par le centre du cercle.

Soient O (*fig.* 44) le centre du cercle, A le point où le cercle est rencontré par l'axe. Menons le rayon OAB; soit L_0 la lecture inconnue que donnerait le point B placé devant l'index; soit e la distance OA, R étant le rayon du cercle.

Soient C la division et L la lecture qui correspondent à l'index dans une autre position du cercle. L'angle CAB est l'angle V, dont le cercle a tourné de la première à la seconde lecture.

On a

$$\text{AC} \sin \text{V} = \text{R} \sin(\text{L} - \text{L}_0),$$
$$\text{AC} \cos \text{V} = \text{R} \cos(\text{L} - \text{L}_0) - e.$$

On en conclut

$$\text{AC} \sin(\text{V} - \text{L} + \text{L}_0) = e \sin(\text{L} - \text{L}_0),$$
$$\text{AC} \cos(\text{V} - \text{L} + \text{L}_0) = \text{R} - e \cos(\text{L} - \text{L}_0);$$

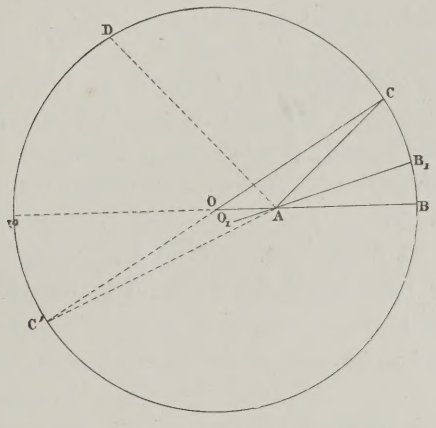
d'où

$$\operatorname{tang}(V - L + L_0) = \frac{e \sin(L - L_0)}{R - e \cos(L - L_0)},$$

et, en négligeant les termes en e^2,

$$V - L + L_0 = \frac{e}{R} \sin(L - L_0).$$

Fig. 44.



Si l'on place un second index au point C′ à une lecture surpassant à peu près de 180° celle donnée par le premier et que l'on désigne par V′ la somme BAC + CAC′, on aura

$$V' - L' + L_0 = \frac{e}{r} \sin(L' - L_0).$$

Comme L′ surpasse L d'à peu près 180°, les erreurs produites par l'excentricité sont, dans les deux cas, égales et de signes contraires. On en déduit

$$\frac{1}{2}(V + V') = \frac{1}{2}(L + L') - L_0.$$

Si la lecture L_0 était connue, la formule précédente ferait connaître l'angle que fait AB avec la bissectrice fixe de l'angle CAC′.

Si l'on fait tourner le cercle d'un angle ω autour de l'axe A, la droite AB prendra une position AB_1 telle que l'angle B_1AB soit égal à ω. Le point O viendra en O_1; la lecture du point B_1 sera L_0

et si L_1, L'_1 désignent les lectures aux index C et C′, on aura

$$B_1AD = \frac{1}{2}(L_1 + L'_1) - L_0.$$

Il s'ensuit que

$$\omega = \frac{1}{2}(L_1 + L'_1) - \frac{1}{2}(L + L').$$

On a donc l'angle dont le cercle tourne en passant d'une position à une autre, en faisant la différence des moyennes des lectures des index dans les deux positions.

180. **Erreurs périodiques de division.** — L'emploi d'une machine à diviser, formée essentiellement d'une vis, introduit dans la graduation d'un cercle des erreurs périodiques dont il est possible de diminuer l'importance en multipliant les couples de microscopes opposés.

Supposons, en effet, l'erreur d'un trait représentée par une série dont les termes soient des sinus ou cosinus de multiples de la lecture, ainsi :

$$e = a_0 + a_1 \cos L + a_2 \cos 2L + \dots + b_1 \sin L + b_2 \sin 2L + \dots.$$

Employons comme index i microscopes équidistants et faisons la moyenne des lectures, l'erreur e_m de la moyenne sera la moyenne des erreurs des divers traits employés. Si L_1 est la lecture du premier, celles des autres sont $L_1 + \frac{2\pi}{i}$, $L_1 + 2\frac{2\pi}{i}$, ..., $L_1 + (i-1)\frac{2\pi}{i}$. Or, on verra au Chapitre suivant que, quel que soit m,

$$\sum_{k=0}^{k=i-1} \sin\left(mL_1 + mk\frac{2\pi}{i}\right) = 0$$

et que

$$\sum_{k=0}^{k=i-1} \cos\left(mL_1 + mk\frac{2\pi}{i}\right) = 0,$$

à moins que m ne soit un multiple de i. Dans ce cas, la somme est égale à $i \cos mL_1$. On a donc

$$e_m = a_0 + a_i \cos iL_1 + a_{2i} \cos 2iL_1 + \dots.$$

Le terme a_0 est sans influence puisqu'il disparaît dans les diffé-

rences des lectures. Les termes suivants a_1, a_2, ... ont disparu, de sorte que si la série est rapidement convergente et que a_i soit petit on aura, en quelque sorte, éliminé complètement les erreurs de division.

Dans la pratique on fait généralement i égal à 6, et ce nombre n'est pas assez grand pour qu'il ne reste aucun doute sur la petitesse du coefficient a_i. On a donc soin d'étudier les erreurs de division du cercle en comparant, au moyen de deux couples de microscopes, des intervalles correspondant à des différences de lecture égales. On compare d'abord les intervalles $0 - 60$, $60 - 120$, $120 - 180$, ..., au moyen de deux couples placés à 60° l'un de l'autre; ensuite on divise en parties égales chacun de ces intervalles au moyen de microscopes placés à 20°. On a ainsi les erreurs des traits 0°, 20°, 40°, ... En plaçant les microscopes à 25° l'un de l'autre, on aura les erreurs des traits de 5° en 5°. Enfin, en les plaçant à 19°, on aura les erreurs des traits de degré en degré. Quant aux subdivisions des degrés, au nombre de 12 dans les grands instruments, on les obtient au moyen d'un seul microscope micrométrique en mesurant successivement les 12 intervalles.

Il faut remarquer qu'il est indispensable de diviser le travail en parties successives comme il vient d'être dit, et d'effectuer chaque opération en une seule séance, dans des conditions de température aussi identiques que possible. La distance de deux traits varie avec la température; mais toutes les distances varient dans le même rapport, et si la division d'un intervalle connu est faite dans des conditions invariables, l'influence de la température disparaît.

181. **Erreurs accidentelles de division.** — La multiplicité du nombre des microscopes a pour effet, d'après la théorie des erreurs, de diminuer l'effet des erreurs accidentelles. L'erreur moyenne de la moyenne de six lectures est égale au quotient de l'erreur moyenne d'une division par la racine carrée de 6; elle est donc à peu près les $\frac{4}{10}$ de l'erreur moyenne d'une division.

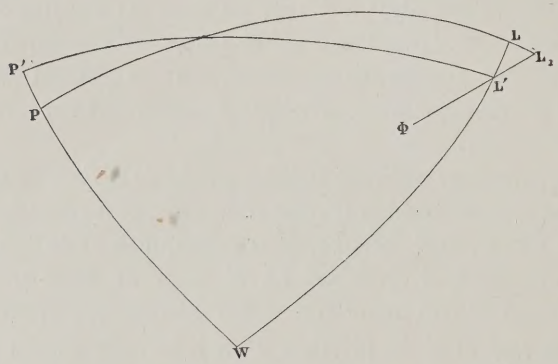
182. **Cercle méridien. Mesure des déclinaisons.** — Sur l'axe de rotation de la lunette méridienne est monté un cercle divisé, dont

le plan lui est perpendiculaire et dont le centre se trouve aussi exactement que possible sur cet axe. Ce cercle tourne avec la lunette en face d'un index formé d'un système de six microscopes micrométriques fixes, comme il a été expliqué plus haut. Un septième microscope à grand champ sert à lire la chiffraison, et les six microscopes à subdiviser l'intervalle de deux traits.

La différence des lectures obtenues dans deux positions de la lunette donne l'angle dont l'axe optique de la lunette a tourné pour passer de l'une de ces positions à l'autre.

Soit, sur la sphère (*fig.* 45), W l'extrémité de l'axe de rotation vers l'ouest, P le pôle du monde, L l'extrémité de l'axe optique de la lunette. Joignons ces trois points par des arcs de grand cercle. Menons, d'autre part, le grand cercle P′L′, dont W est le pôle. Appelons le point P′ le *pôle de l'instrument* et l'arc P′L′ la

Fig. 45.



distance polaire instrumentale. L'arc PP′ est excessivement petit; L′L est aussi très petit, pouvant cependant être notablement plus grand que PP′. D'après les notations antérieures, on a

$$PP' = n, \qquad L'L = f.$$

Représentons par $90^\circ - \delta'$ la distance polaire instrumentale P′L′. C'est aussi la mesure de l'angle W. Les côtés du triangle PLW sont

$$90^\circ - n, \quad 90^\circ + f, \quad 90^\circ - \delta,$$

et les angles opposés

$$L, \quad 90^\circ - m + \tau, \quad 90^\circ - \delta'.$$

On en conclut

$$\begin{aligned} \sin\delta &= -\sin n \sin f + \cos n \cos f \sin\delta', \\ \cos\delta\cos(\tau - m) &= \cos f \cos\delta', \\ \cos\delta\sin(\tau - m) &= \cos n \sin f + \sin n \cos f \sin\delta'. \end{aligned}$$

Le terme $\sin n \sin f$ n'a sur δ aucune influence sensible; si on le supprime et qu'on remplace $\cos n$ par un, la combinaison des deux relations donne

$$\operatorname{tang}\delta = \cos(\tau - m)\operatorname{tang}\delta'.$$

En posant

$$q = -\operatorname{tang}^2\frac{\tau - m}{2},$$

on en déduit

$$\delta = \delta' + q\sin 2\delta' + \frac{q^2}{2}\sin 4\delta' + \dots. \tag{8}$$

L'angle horaire τ est donné par la formule (4), (p. 178). Il n'entre ici que par le quart de son carré. Il n'a donc sur δ aucune influence sensible si τ n'atteint pas 5′. Il s'ensuit qu'en particulier les constantes instrumentales m, c de la lunette méridienne peuvent être entièrement négligées.

183. Influence de l'inclinaison du fil. — Le fil de déclinaison est une droite parallèle à l'axe de rotation de la lunette. Il se projette sur la sphère céleste suivant le grand cercle L′L. Il peut arriver cependant qu'il forme avec sa position théorique, dans le plan focal, un certain angle. Soit ΦL′W cet angle; désignons-le par i et comptons-le positivement si la partie occidentale L′Φ du fil est trop au nord, la lunette étant dans l'équateur. L'astre au lieu d'être observé en L l'est alors en L_1; la lecture faite correspond cependant à L. Il faut donc appliquer à la déclinaison trouvée une correction I donnée par

$$I = \mp f \operatorname{tang} i \quad \begin{cases} ps, \\ pi. \end{cases}$$

On détermine i en observant une étoile aux deux extrémités du champ; les corrections sont de signes contraires; la différence de ces corrections est donc aussi grande que possible.

184. Emploi d'un fil mobile. — Comme pour la mesure des angles horaires, on place dans le plan focal un fil de déclinaison

mobile, appartenant à un micromètre, de sorte que le micromètre méridien a deux glissières et deux vis rectangulaires.

Le fil mobile de déclinaison sert à faire les mesures de déclinaison en même temps que celles d'ascensions droites. On détermine d'abord la lecture du tambour pour le cas où le fil mobile coïncide avec l'un des fils fixes. On détermine la valeur angulaire d'un tour de la vis en observant un même point au fil mobile aux deux extrémités du champ, et pour cela faisant tourner le cercle. L'équivalence entre la différence des lectures du cercle et la différence des lectures du tambour permet de conclure la valeur d'un tour de cette vis.

185. **Emploi d'une mire.** — Le plus simple, pour l'opération qui précède, est de pointer la lunette sur un point lumineux obtenu en éclairant un très petit trou percé dans un disque placé, en face de l'instrument méridien, au foyer d'une lentille dite *objectif de la mire* et qui, pratiquement, a environ 60^m de distance focale.

Les rayons lumineux issus de la mire traversent son objectif et émergent parallèlement de sorte qu'ils forment une image dans le plan focal de la lunette méridienne. Le point lumineux et son centre optique déterminent une direction qui, pendant la durée de l'opération, peut être regardée comme fixe. En faisant passer le fil mobile de déclinaison par l'image de la mire, on obtient une direction parallèle à la première.

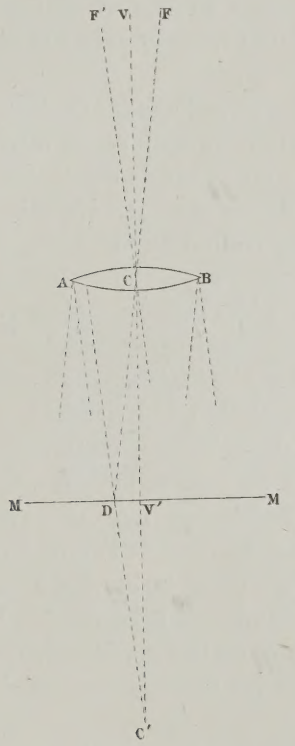
On emploie également la mire pour déterminer la collimation de la lunette méridienne; il est plus commode de faire le retournement de la lunette sur la mire que sur une circompolaire, puisqu'on peut le faire à tout instant, tandis qu'il n'y a pas toujours une polaire bien connue dans le voisinage immédiat du méridien.

186. **Emploi du bain de mercure. Nadir. Nivellement.** — Si l'on place la lunette verticalement, l'objectif en bas, et que l'on place au-dessous une cuve à mercure formant un miroir rigoureusement horizontal, on verra, en mettant l'œil à l'oculaire, d'une part, directement les fils du micromètre; d'autre part, leurs images produites par réflexion sur la surface du mercure.

Coupons (*fig.* 46) le système par un plan vertical, soit par le méridien, soit par le plan est-ouest (*premier vertical*).

Soient AB la coupe de l'objectif, C son centre optique, FC l'axe optique déterminé soit par le fil horaire sans collimation dans le second cas, soit par le fil fixe de déclinaison dans le premier. Soit MM′ la coupe de la surface du mercure.

Fig. 46.



Les rayons lumineux issus de F émergent parallèlement à FC. Le rayon FC lui-même rencontre la surface du mercure en D, se réfléchit suivant DC′, tandis que les autres se réfléchissent parallèlement à DC′, traversent l'objectif AB et viennent former une image en F′, symétrique de F par rapport à la verticale VCV′C′.

Si l'on mesure avec le fil mobile la distance angulaire FF′, on aura le double de l'angle que fait CF avec la verticale.

On peut aussi n'employer que le fil mobile; en le faisant coïncider avec son image, on aura la position même de la verticale VCV′.

On voit de suite que le procédé appliqué aux fils horaires donnera l'inclinaison de l'axe de rotation. Il suffira pour cela d'avoir déterminé d'abord la position du fil sans collimation. Si l'on place le fil horaire mobile dans cette position et qu'il ne coïncide pas avec son image, on sera assuré que l'axe de rotation est incliné et l'inclinaison sera égale au déplacement qu'il faudra donner au fil mobile pour le faire coïncider avec son image.

Le même procédé appliqué aux fils de déclinaison fait connaître le nadir, c'est-à-dire la lecture du cercle méridien qui correspond à la position verticale du fil fixe de déclinaison. Cet élément est indispensable pour la détermination de la latitude. La colatitude est l'angle que forme la direction du nadir avec la bissectrice des deux directions dans lesquelles se trouve une circompolaire à son passage supérieur et à son passage inférieur.

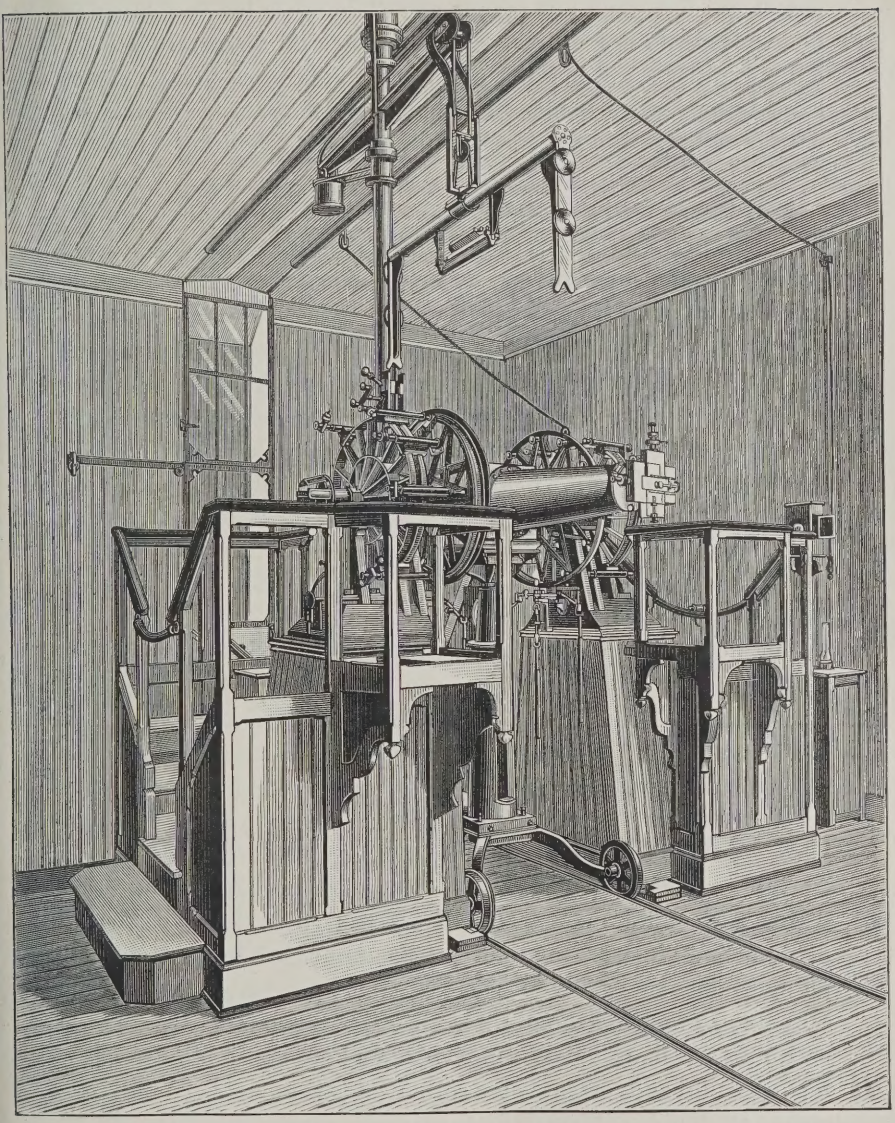
187. **Observations par réflexion.** — On peut déterminer la hauteur apparente d'une étoile en observant successivement, dans le voisinage immédiat du méridien, cette étoile et son image produite par la surface d'un bain de mercure. On procède ainsi : on dirige la lunette sur l'étoile, on lit les microscopes du cercle et un peu avant le méridien on observe l'étoile au fil mobile de déclinaison. Après quoi on place la lunette à la lecture convenable pour voir l'image produite par la surface du bain de mercure; on observe au fil mobile et on lit les microscopes.

La demi-différence des lectures donne la hauteur apparente de l'étoile.

La demi-somme donne la lecture à l'horizon; elle est indépendante de la réfraction.

188. **Explication de la fig. 47.** — La *fig.* 47 représente le cercle méridien de l'Observatoire de Toulouse. Il est pourvu de deux cercles divisés, lus chacun par six microscopes. Dans ce dessin l'appareil de retournement est placé au-dessous de la lunette, prêt à la soulever avec les cercles qui lui sont fixés et à l'emporter au sud de la salle. Au plafond est suspendu le niveau qui tourne de 90° autour de la colonne verticale à laquelle il est suspendu et qui peut s'élever ou s'abaisser au moyen d'un mécanisme appro-

Fig. 47.



Cercle méridien de P. Gautier de l'Observatoire de Toulouse.

prié. Les piliers en pierre, sur lesquels sont fixés les coussinets de l'instrument, sont enveloppés de gaines en bois qui ne les touchent pas et qui ont pour but principal de diminuer les variations de température de ces piliers. Une différence de température de 1° entre le pilier est et le pilier ouest entraînerait une inclinaison de l'axe de plusieurs secondes. Ces gaines font corps avec les escaliers destinés à la lecture des cercles et à la manœuvre du niveau.

189. **Équatorial.** — L'équatorial (*fig.* 48) se compose d'un axe de rotation A, nommé *axe horaire,* dirigé exactement suivant l'axe du monde, coudé suivant $A_1 A_1$, à son extrémité supérieure, de façon à supporter les coussinets C_1, C_1 d'un second axe de rotation B, dit *axe de déclinaison,* perpendiculaire au premier. A l'une des extrémités de ce second axe est fixé le tube L_1 d'une lunette astronomique, de telle façon que l'axe optique de cette lunette soit perpendiculaire à l'axe de déclinaison. A l'autre extrémité de l'axe de déclinaison est fixé un cercle D, divisé, qui tourne avec cet axe et, par suite, avec la lunette, devant un index invariablement fixé à la pièce qui porte les coussinets.

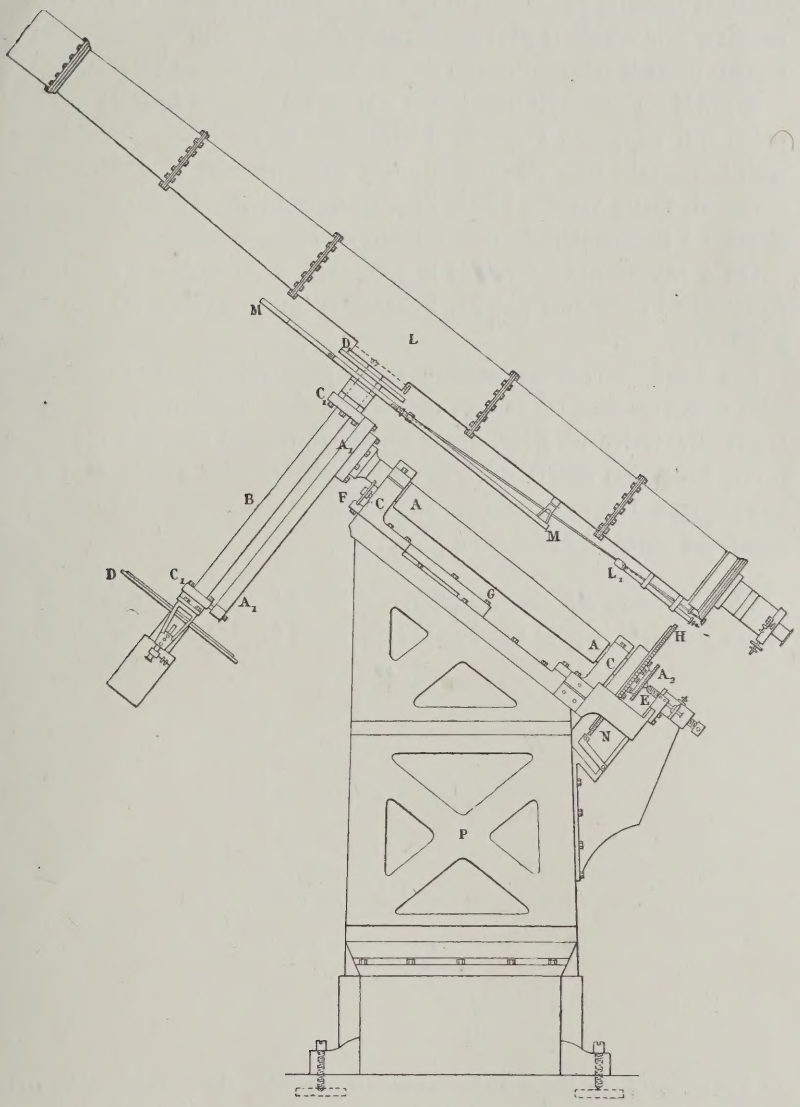
L'axe A est supporté par deux coussinets C, C fixés à un pied très solide P. Il porte à son extrémité inférieure un cercle divisé H, mobile devant un index fixé au pied P. Pour empêcher l'axe A de glisser dans ses coussinets, on a terminé cet axe à sa partie inférieure par une pointe A_2 qui appuie sur un butoir E.

Dans la figure, on s'est borné à une représentation géométrique des axes, de leurs supports et des cercles, en supposant que l'on ait placé l'axe de déclinaison et la lunette dans le plan vertical de l'axe horaire. On a supprimé les contrepoids nécessaires pour équilibrer l'instrument, et les divers organes du mouvement d'horlogerie dont tout équatorial est pourvu et dont l'objet est de donner à l'instrument tout entier, autour de son axe horaire, un mouvement de rotation de même vitesse angulaire et de même sens que le mouvement diurne. On a pu cependant représenter en F l'un des deux galets supportés par l'extrémité d'un robuste ressort G qui supportent la plus grande partie du poids de l'instrument, et diminuent ainsi le frottement sur le coussinet supérieur C.

Des galets analogues qu'il a été impossible de représenter,

placés autour de l'axe de déclinaison dans le voisinage de son cous-

Fig. 48.



sinet supérieur C_1 en augmentent la mobilité. Tout à côté du tube de la lunette est un cercle D_1 lu au moyen d'une lunette pointeur

L_1 placée près de l'oculaire. Ce cercle D_1 divisé de dix minutes en dix minutes donne, à l'estime, la minute d'arc et sert avec le cercle H à mettre en place la lunette L avec une précision suffisante, tandis que le cercle D plus finement divisé ne sert qu'exceptionnellement pour la détermination des constantes instrumentales.

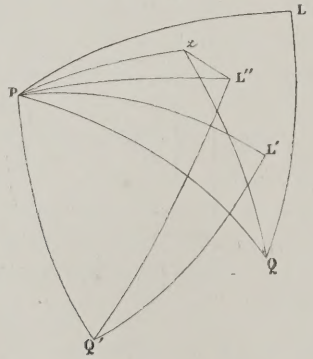
En MM on aperçoit une pince qui sert à fixer la lunette sur la pièce qui supporte l'axe de déclinaison et en N est une pièce mobile portant une vis tangente qui engrène avec la denture du cercle H. Cette vis sert à fixer l'instrument à l'angle horaire voulu, et aussi à transmettre le mouvement de l'horlogerie.

On a représenté (*fig.* 52) le télescope à miroir et à monture équatoriale construit par M. P. Gautier pour l'Observatoire de Toulouse.

Les conditions d'orientation et de perpendicularité mentionnées ci-dessus ne sont jamais réalisées d'une manière rigoureuse. Il est nécessaire de déterminer quelle influence ont, sur les lectures, les petits écarts qui peuvent subsister. Ces écarts sont de deux sortes. Les uns tiennent à la construction même de l'instrument, les autres à sa mise en place.

190. Erreurs de construction. — Soient, sur une sphère de rayon infini, P le pôle nord de l'instrument (*fig.* 49), Z le zénith,

Fig. 49.



Q l'extrémité de l'axe de déclinaison du côté du cercle, cet axe étant horizontal et le cercle à l'ouest, L l'axe optique de la lunette, du côté de l'objectif, cet axe optique étant supposé placé perpendiculairement à l'axe horaire.

D'après ces hypothèses, on a

$$PL = 90^\circ, \qquad ZQ = 90^\circ.$$

Les arcs PQ et LQ représentent respectivement les angles de l'axe horaire et de la lunette avec l'axe de déclinaison. Ces angles sont très voisins de 90°. Les écarts ne dépassent jamais quelques minutes d'arc; leurs carrés sont négligeables. Nous poserons

$$PQ = 90^\circ - i, \qquad LQ = 90^\circ - c,$$

et nous désignerons, dans cette position initiale de l'instrument, par a_0 la lecture du cercle horaire et par b_0 la lecture du cercle de déclinaison.

L'arc PZ est la distance zénithale du pôle de l'instrument; c'est le complément de la latitude instrumentale. Soit φ_1 cette latitude très voisine de la latitude géographique φ. On a

$$PZ = 90^\circ - \varphi_1.$$

Le triangle PQL donne

$$0 = \sin i \sin c + \cos i \cos c \cos PQL;$$

d'où, en négligeant le produit ic,

$$PQL = 90^\circ.$$

Le triangle PQZ donne

$$0 = \sin \varphi_1 \sin i + \cos \varphi_1 \cos i \cos QPZ;$$

d'où, en négligeant le carré de i,

$$QPZ = 90^\circ + i \operatorname{tang} \varphi_1.$$

Cela obtenu, faisons tourner l'instrument tout entier autour de l'axe horaire, de telle façon que la lecture du cercle horaire devienne a. Le triangle PQL prendra, sans se déformer, la position PQ′L′ et l'angle Q′PQ sera l'angle dont l'instrument a tourné,

$$Q'PQ = a - a_0.$$

Faisons ensuite tourner la lunette autour de l'axe de déclinaison, de façon à l'amener en L″. Si la nouvelle lecture du cercle de déclinaison est b, la lunette a tourné d'un angle $b - b_0$, et l'on a

$$L'Q'L'' = b - b_0.$$

Proposons-nous de déduire des lectures l'angle horaire instrumental t_1 et la déclinaison instrumentale δ_1. Ces éléments seront donnés par le triangle PQ'L'', dont les côtés sont

$$PL'' = 90^\circ - \delta_1, \qquad PQ' = 90^\circ - i, \qquad L''Q' = L'Q' = LQ = 90^\circ - c.$$

L'angle opposé à PL'' est

$$PQ'L'' = PQ'L' - L''Q'L' = 90^\circ - b + b_0.$$

L'angle opposé à Q'L'' est

$$Q'PL'' = Q'PQ + QPZ - L''PZ = a - a_0 + 90^\circ + i \operatorname{tang} \varphi_1 - t_1.$$

En appliquant à ce triangle les relations fondamentales de la Trigonométrie sphérique, on a

$$\begin{aligned} \sin \delta_1 &= \sin i \sin c + \cos i \cos c \sin(b - b_0), \\ \cos \delta_1 \sin(a - a_0 - t_1 + i \operatorname{tang} \varphi_1) &= -\sin c \cos i + \cos c \sin i \sin(b - b_0); \end{aligned}$$

d'où, en négligeant les quantités du second ordre par rapport à i et c,

$$(9) \quad \begin{cases} \delta_1 = b - b_0, \\ t_1 = a - a_0 + i \operatorname{tang} \varphi_1 + c \sec(b - b_0) - i \operatorname{tang}(b - b_0). \end{cases}$$

191. Passage de la position directe à la position inverse. — Supposons que les graduations permettent d'appliquer ces formules dans la position directe de l'instrument (lunette au méridien vers l'équateur, cercle de déclinaison à l'ouest). Déplaçons la lunette de façon à dépasser le pôle. La lunette sera dans la position inverse. Alors b dépassera 90°. On devra, dans les formules, remplacer δ_1 par $180^\circ - \delta_1$, et la lecture a correspondra à $t_1 \pm 180^\circ$; de sorte que, dans la position inverse, les formules (9) deviendront

$$(10) \quad \begin{cases} 180^\circ - \delta_1 = b - b_0, \\ t_1 + 180^\circ = a - a_0 + i \operatorname{tang} \varphi_1 - c \sec \delta_1 + i \operatorname{tang} \delta_1. \end{cases}$$

192. Calcul des coordonnées célestes. — On déduit aisément des coordonnées instrumentales les coordonnées célestes.

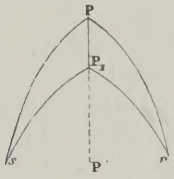
Soient P le pôle du monde (*fig.* 50), P_1 le pôle de l'instrument, Z le zénith. Désignons par ϖ la distance polaire PP_1, par τ l'angle

horaire P_1PZ du pôle de l'instrument, et par τ' l'angle $P'P_1Z$ que forme PP_1 prolongé avec P_1Z.

Dans le triangle PP_1Z, les côtés ont respectivement pour valeurs

$$PP_1 = \varpi, \qquad P_1Z = 90^\circ - \varphi_1, \qquad PZ = 90^\circ - \varphi.$$

Fig. 50.



L'angle opposé à P_1Z est τ; l'angle opposé à PZ est $180^\circ - \tau'$. On en déduit

$$\begin{aligned} \sin\varphi_1 &= \sin\varphi\cos\varpi + \cos\varphi\sin\varpi\cos\tau, \\ \cos\varphi_1\sin\tau' &= \cos\varphi\sin\tau, \\ \cos\varphi_1\cos\tau' &= -\sin\varphi\sin\varpi + \cos\varphi\cos\varpi\cos\tau. \end{aligned}$$

Négligeant le carré de ϖ, on a

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi + \varpi\cos\varphi\cos\tau, \\ \tau' - \tau &= \varpi\,\mathrm{tang}\,\varphi\sin\tau. \end{aligned}$$

Cela trouvé, soient S l'étoile, t son angle horaire SPZ et δ sa déclinaison égale à $180^\circ - PS$. Dans le triangle PSP_1, les côtés sont respectivement

$$\varpi, \quad 90^\circ - \delta, \quad 90^\circ - \delta_1.$$

L'angle opposé au deuxième est $180^\circ - (t_1 - \tau')$; l'angle opposé au troisième est $t - \tau$. On a donc, en négligeant le carré de ϖ,

$$\begin{aligned} \sin\delta &= \sin\delta_1 - \varpi\cos\delta_1\cos(t_1 - \tau'), \\ \cos\delta\sin(t-\tau) &= \cos\delta_1\sin(t_1 - \tau'), \\ \cos\delta\cos(t-\tau) &= \varpi\sin\delta_1 + \cos\delta_1\cos(t_1 - \tau'). \end{aligned}$$

On en déduit

$$\delta = \delta_1 - \varpi\cos(t_1 - \tau') = \delta_1 - \varpi\cos(t_1 - \tau)$$

et

$$t - \tau - t_1 + \tau' = -\varpi\,\mathrm{tang}\,\delta_1\sin(t_1 - \tau')$$

ou

$$t = t_1 - \varpi \operatorname{tang}\varphi \sin\tau - \varpi \operatorname{tang}\delta \sin(t_1 - \tau).$$

Remplaçant t_1 et δ_1 par les valeurs trouvées au § 190, on a

$$(11)\quad \begin{cases} \delta = b - b_0 - \varpi \cos(t - \tau), \\ t = a - a_0 + i \operatorname{tang}\varphi + c \sec\delta \\ \qquad - i \operatorname{tang}\delta - \varpi \operatorname{tang}\varphi \sin\tau - \varpi \operatorname{tang}\delta \sin(t - \tau) \end{cases}$$

et, dans la position inverse,

$$(12)\quad \begin{cases} 180^\circ - \delta = b - b_0 + \varpi \cos(t - \tau), \\ 180^\circ + t = a - a_0 + i \operatorname{tang}\varphi - c \sec\delta \\ \qquad + i \operatorname{tang}\delta - \varpi \operatorname{tang}\varphi \sin\tau - \varpi \operatorname{tang}\delta \sin(t - \tau). \end{cases}$$

193. **Détermination des constantes.** — Observons, en déclinaison près du méridien, une étoile connue dans la position directe et dans la position inverse. Soient b_1 et b_2 les lectures. Nous aurons

$$\delta = b_1 - b_0 \mp \varpi \cos\tau,$$
$$180^\circ - \delta = b_2 - b_0 \pm \varpi \cos\tau$$

(le signe supérieur s'appliquant à un passage supérieur, le signe inférieur à un passage inférieur); on en conclut

$$b_0 = \frac{b_1 + b_2}{2} - 90^\circ,$$

$$\pm \varpi \cos\tau = 90^\circ - \delta - \frac{b_2 - b_1}{2}.$$

Lisons dans les mêmes conditions le cercle horaire et la pendule sidérale; soient α l'ascension droite de l'astre, t_s l'heure sidérale. Nous aurons, dans la position directe,

$$t_s - \alpha = a + a_0 + i \operatorname{tang}\varphi + c \sec\delta$$
$$- i \operatorname{tang}\delta - \varpi \sin\tau \operatorname{tang}\varphi + \varpi \sin\tau \operatorname{tang}\delta$$

et, dans la position inverse,

$$180^\circ + t'_s - \alpha = a' - a_0 + i \operatorname{tang}\varphi - c \sec\delta$$
$$+ i \operatorname{tang}\delta - \varpi \sin\tau \operatorname{tang}\varphi + \varpi \sin\tau \operatorname{tang}\delta.$$

Ces équations, si l'on y réunit au second membre tous les

termes connus et que l'on pose

$$\alpha_1 = a_0 - i \operatorname{tang}\varphi - \varpi \sin\tau \operatorname{tang}\varphi,$$

s'écrivent

$$\varpi \sin\tau \operatorname{tang}\delta + c \operatorname{séc}\delta - i \operatorname{tang}\delta - \alpha_1 = m,$$
$$\varpi \sin\tau \operatorname{tang}\delta - c \operatorname{séc}\delta + i \operatorname{tang}\delta - \alpha_1 = n;$$

on en tire

$$\varpi \sin\tau \operatorname{tang}\delta - \alpha_1 = \frac{m+n}{2},$$

$$c \operatorname{séc}\delta - i \operatorname{tang}\delta = \frac{m-n}{2}.$$

Si l'on recommence avec une autre étoile de déclinaison δ', on a

$$\varpi \sin\tau \operatorname{tang}\delta' - \alpha_1 = \frac{m'+n'}{2},$$

$$c \operatorname{séc}\delta' - i \operatorname{tang}\delta' = \frac{m'-n'}{2}.$$

On tire des quatre équations les valeurs de $\varpi \sin\tau$, α_1, c, i et il est aisé de voir qu'il convient, pour augmenter la précision, de choisir une étoile près du pôle et une étoile loin du pôle. De α_1 on déduira la lecture initiale a_0.

On voit aisément que la première opération permet de rectifier l'index du cercle de déclinaison et la hauteur du pôle de l'instrument; la seconde, si elle est faite sur une étoile équatoriale, permet d'obtenir la valeur de c et, en l'annulant, de rendre l'axe optique perpendiculaire à l'axe de déclinaison; la troisième, faite sur une étoile voisine du pôle, donnera $\varpi \sin\tau$, et i, par suite, permettra d'annuler l'azimut de l'instrument et de rendre l'axe de déclinaison perpendiculaire à l'axe horaire. On recommencera, après le réglage des deux axes, la seconde observation, de façon à obtenir a_0, l'erreur d'index du cercle horaire.

On peut aussi rectifier l'azimut au moyen du cercle de déclinaison. Si, en effet, après avoir annulé b_0 et $\varpi \cos\tau$, on observe en déclinaison une étoile vers 6^h d'ascension droite, on aura

$$-\varpi \sin\tau = \delta - b.$$

194. Réglage pratique de l'équatorial. — Il ne sera pas inutile de reproduire ici les règles pratiques les plus commodes pour le

réglage d'un équatorial, telles qu'elles ont été données par M. Grubb, le célèbre constructeur de Dublin.

L'instrument est toujours pourvu d'une petite lunette à très grand champ, dite *chercheur,* réglable de telle manière que son axe optique soit parallèle à celui de l'instrument.

1° On ajuste rigoureusement le chercheur sur une belle étoile.

2° On observe une étoile équatoriale près du méridien, dans les deux positions de la lunette, notant l'heure et lisant le cercle d'ascension droite. Si la différence des lectures est égale à celle des heures, à douze heures près, l'axe de la lunette est perpendiculaire à l'axe de déclinaison.

3° On répète cette opération sur une étoile voisine du pôle pour vérifier si l'axe de déclinaison est perpendiculaire à l'axe polaire.

4° On pointe la lunette sur une belle étoile assez haute, près du méridien; on lit le cercle de déclinaison, et cela dans les deux positions de l'instrument. On met le zéro de l'index à la moyenne des deux lectures.

5° On cale la lunette en déclinaison au passage de l'étoile au méridien et l'on amène l'étoile au milieu du champ, en déclinaison, en faisant jouer les vis du pied. L'axe horaire est ainsi placé à la latitude du lieu.

6° On prend deux étoiles assez hautes, l'une avant, l'autre après le méridien, de trois heures à six heures d'ascension droite l'une de l'autre. On cale la lunette en déclinaison, et on la dirige sur l'étoile ouest; on amène cette étoile au centre du champ en faisant mouvoir, s'il le faut, la vis d'azimut du pied; on passe à l'étoile est, on en fait autant sur elle, après quoi on place la vis d'azimut du pied dans une position moyenne entre les deux positions qu'il a fallu lui donner. La rectification est terminée.

On recommence toute l'opération.

L'instrument est alors en place, ainsi que l'index du cercle de déclinaison. On rectifie l'index du cercle d'ascension droite en calant sur une étoile connue voisine du méridien et comparant l'angle horaire donné par le cercle avec celui que donne la pendule.

195. Observations équatoriales micrométriques. — La théorie

de l'équatorial exposée dans les paragraphes précédents n'a pas d'autre application que la détermination même des constantes instrumentales. On conçoit sans peine que la construction de l'instrument, avec deux axes de rotation inclinés, ne permet pas une précision comparable à celle que l'on peut attendre du cercle méridien.

L'adaptation d'un micromètre à l'instrument permet au contraire, grâce à la facilité que donne le mouvement d'horlogerie, de mesurer les différences d'ascension droite et de déclinaison de deux astres très voisins avec une précision plus grande que celle que donne un cercle méridien pour des astres quelconques, en raison de ce que, la réfraction étant sensiblement la même pour les deux astres, l'inexactitude qui reste sur elle se trouve éliminée.

Les observations micrométriques se font de trois manières différentes, que nous allons exposer successivement.

196. **Mesure de l'angle de position et de la distance de deux astres.** — On appelle *angle de position* d'un astre par rapport à un autre l'angle que fait avec le cercle de déclinaison du second astre le grand cercle qui joint le second au premier. Cet angle se compte sur la sphère céleste de 0° à 360° du nord vers l'est.

Pour mesurer cet angle, on règle d'abord le fil mobile du micromètre suivant le mouvement diurne. La lecture du cercle de position du micromètre modifiée de 90° donne celle que l'on aurait si l'on dirigeait le fil suivant le cercle de déclinaison. On tourne le micromètre de façon à faire passer le fil par les deux astres. L'excès de la nouvelle lecture sur la première est l'angle de position. On modifie la dernière lecture de 90° et l'on place le fil fixe sur l'une des étoiles et le fil mobile sur l'autre. L'écart des deux fils est la distance des deux astres. Cet écart est donné, en pas de la vis, par la différence entre la lecture du tambour de la tête de la vis et la lecture de ce même tambour qui correspond à la coïncidence du fil fixe avec le fil mobile.

Il est manifeste que ce procédé suppose l'équatorial rigoureusement installé. Cependant on n'a pas, à l'ordinaire, à tenir compte des erreurs instrumentales, la méthode étant surtout em-

ployée pour la détermination de la position relative de deux astres très voisins, par exemple des composantes d'une étoile double, dont la distance est presque toujours de beaucoup inférieure à une minute d'arc. Une erreur d'un dixième de degré sur l'angle de position ne produirait, comme on le verra par les formules de l'alinéa suivant, qu'une erreur insensible sur la différence de déclinaison des deux astres, ou sur le produit de la différence d'ascension droite par le cosinus de la déclinaison, et l'on voit sans peine qu'il faut être dans le voisinage immédiat du pôle pour que les erreurs instrumentales puissent produire sur l'angle de position une erreur d'un dixième de degré.

Si l'on désigne par s la distance des deux astres, par p l'angle de position, par α et δ, α' et δ' les ascensions droites et déclinaisons des deux astres, on a visiblement, aux termes près du troisième ordre,

$$\delta' - \delta = s \cos p,$$
$$\alpha' - \alpha = s \sin p \operatorname{séc} \delta.$$

197. **Mesure directe de la différence d'ascension droite et de la différence de déclinaison de deux astres, en s'aidant de la pendule sidérale.** — On dirige les fils parallèles à la tête de vis suivant les cercles de déclinaison en plaçant les fils perpendiculaires suivant le mouvement diurne, ce que l'on vérifie en constatant qu'une des étoiles à observer suit rigoureusement l'un de ces fils. Cela fait, on fixe la lunette dans une position telle que les deux astres soient encore en dehors du champ. On note les heures des passages de ces deux astres aux fils de déclinaison. La différence des moyennes de ces heures est la différence d'ascension droite. On pointe en même temps le fil mobile alternativement sur les deux astres. La différence des moyennes des lectures est la différence de déclinaison.

Ce procédé est ordinairement employé pour les observations de planètes ou de comètes. Le plus souvent on alterne les déterminations de différence d'ascension droite et de différence de déclinaison, de telle façon que la moyenne des heures des observations de déclinaison coïncide à quelques secondes près avec la moyenne des heures des observations d'ascension droite, ce qui permet de regarder les deux observations comme faites à un même instant.

198. **Mesure directe au moyen du micromètre à deux vis parallèles de la différence d'ascension droite.** — On peut mesurer rapidement, au moyen d'un micromètre à deux vis parallèles, la différence d'ascension droite quand les deux astres sont ensemble dans le champ de la lunette. Pour cela, ayant réglé les fils mobiles sur le mouvement diurne, on tourne, au moyen du cercle de position, le micromètre de 90°, après quoi, utilisant le mouvement d'horlogerie, on place simultanément l'un des fils mobiles sur l'un des astres, l'autre fil mobile sur le second astre. La somme des lectures, diminuée de la somme des lectures qui correspondent à la coïncidence des fils, représente en pas des vis supposées identiques le produit de la différence d'ascension droite par le cosinus de la déclinaison.

Ce procédé, très commode et précis quand les deux astres sont très voisins l'un de l'autre et le mouvement d'horlogerie excellent, permet de reconnaître au bout de quelques minutes le plus petit déplacement d'un des astres par rapport à l'autre. Il est donc à recommander pour les observations de petites planètes. On ne doit l'employer que si les astres sont assez loin du pôle pour que les erreurs instrumentales puissent être négligées.

199. **Détermination de la valeur angulaire du pas de la vis.** — Pour éviter d'avoir à tenir compte des constantes instrumentales toujours mal connues, on détermine la valeur angulaire du pas de la vis en mesurant, au moyen du fil mobile, la différence de déclinaison de deux étoiles bien connues. On choisit ordinairement deux étoiles de la constellation des Pléiades qui ont été comparées avec le plus grand soin par Bessel et plus tard par M. Wolf.

200. **Équatorial coudé.** — Il nous a paru nécessaire de décrire ici, au moins sommairement, l'équatorial coudé, imaginé il y a quelques années par M. Lœwy, et établi récemment dans un assez grand nombre d'observatoires.

Imaginons qu'une lunette astronomique soit mobile dans le plan de l'équateur. Plaçons en avant de l'objectif un miroir plan incliné de 45° sur l'axe de cette lunette, mobile d'ailleurs autour de cet axe. Ce miroir renverra, suivant l'axe de la lunette, les rayons lumineux provenant, suivant la position du miroir, des divers

points du ciel situés sur un grand cercle perpendiculaire à l'axe de la lunette, c'est-à-dire des points d'un cercle horaire perpendiculaire à celui que détermine l'axe de la lunette. Si, d'autre part, on place au point de cet axe autour duquel la lunette tourne un miroir invariablement lié à la lunette et incliné de 45° sur son axe et sur l'équateur, ce miroir renverra les rayons lumineux suivant l'axe du monde. Le plan focal sera reporté perpendiculairement à cet axe, et l'on examinera l'image au moyen d'un oculaire dont la position sera invariable.

C'est sur ces principes qu'est construit l'équatorial coudé de l'Observatoire de Nice représenté géométriquement sur la *fig.* 51. Quelques lignes suffiront à expliquer le mécanisme.

Comme il y avait très grand inconvénient à placer le premier miroir en avant de l'objectif parce que, ce miroir n'étant pas abrité, son argenture se ternissait très rapidement, on a placé l'objectif en O sur le côté du cube M et le miroir D à l'intérieur de ce cube.

Le cube M, auquel sont fixés l'objectif O et le miroir D, termine le tube intérieur I qui roule, par des galets F, F′, dans le tube extérieur S.

L'oculaire ω est porté par le tube intérieur K, qui roule dans le tube extérieur P, par des galets N placés à la partie inférieure et est ajusté à la partie supérieure, dans une douille fixée à ce même tube extérieur P.

Ces deux tubes intérieurs I et K sont terminés à leur partie inférieure par des couronnes de bronze dentées, dont chacune engrène avec une vis tangente. Ces deux vis tangentes e, e' sont reliées l'une à l'autre par engrenage.

La vis tangente e' est mise en mouvement par l'intermédiaire d'un long tube R, au moyen d'une manivelle A. Le mouvement de cette manivelle A fait donc tourner à la fois les deux tubes intérieurs I et K, et, par suite, l'oculaire et le cube M qui porte l'objectif et le miroir D.

Le cube central T relie invariablement les deux tubes extérieurs, et porte le miroir plan E incliné à 45° sur les axes de ces deux tubes.

On fait tourner l'instrument tout entier autour de l'axe horaire au moyen de la manette B.

L'axe du tube extérieur S étant, au moyen de cette manette B,

Fig. 51.

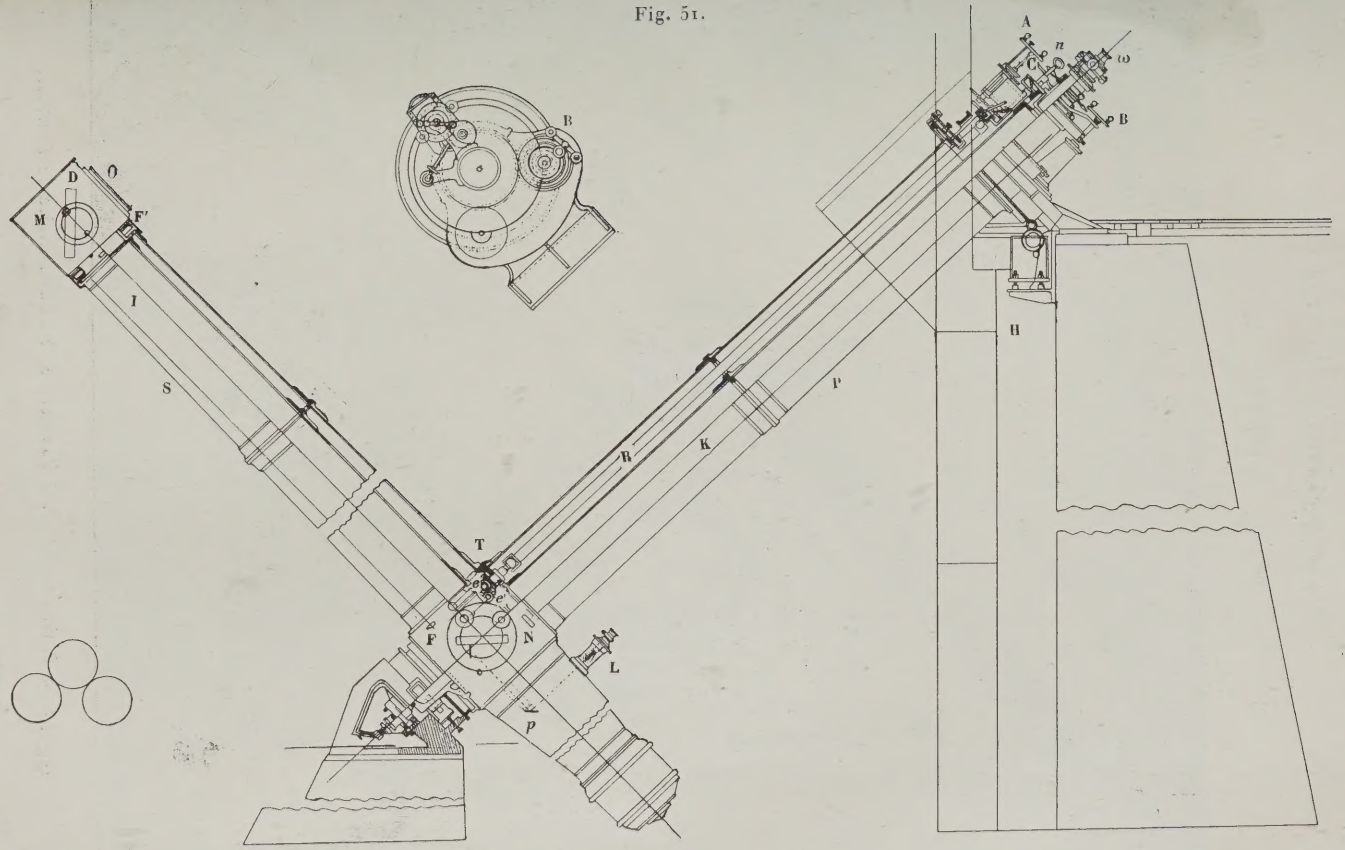
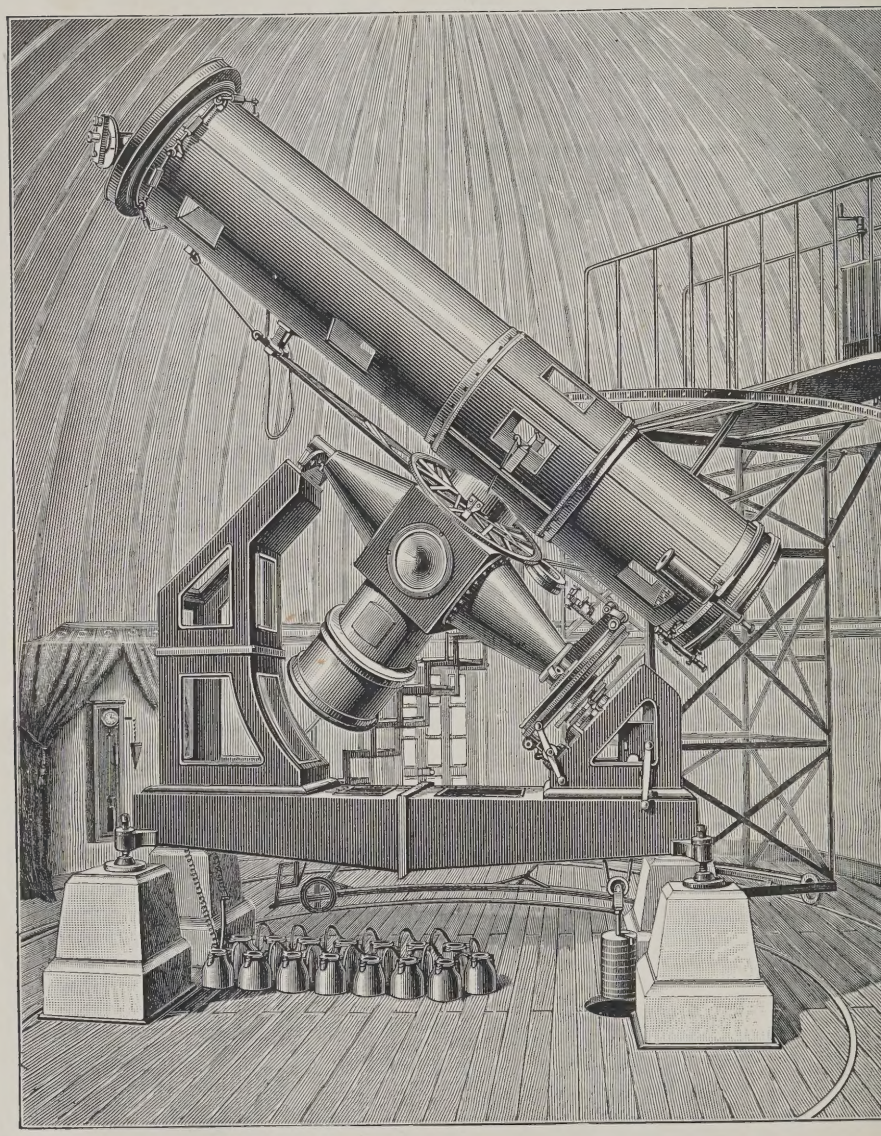


Fig. 52.



Télescope de P. Gautier de $0^m,83$ d'ouverture de l'Observatoire de Toulouse.

placé dans un plan horaire déterminé π, l'axe optique de l'objectif O est dans un plan horaire π' perpendiculaire au plan π et décrit dans ce plan horaire π', par la rotation du cube M, des angles égaux à ceux dont ce cube M a tourné.

Il suit de là que le cercle divisé C par lequel se termine, à sa partie supérieure, le tube mobile K est le cercle de déclinaison. Le tube fixe P se termine par le cercle horaire. Le vernier du cercle C est tracé sur le limbe du cercle horaire. Les verniers du cercle horaire sont portés par un limbe ajusté à frottement doux sur le cercle horaire et invariablement fixé au socle.

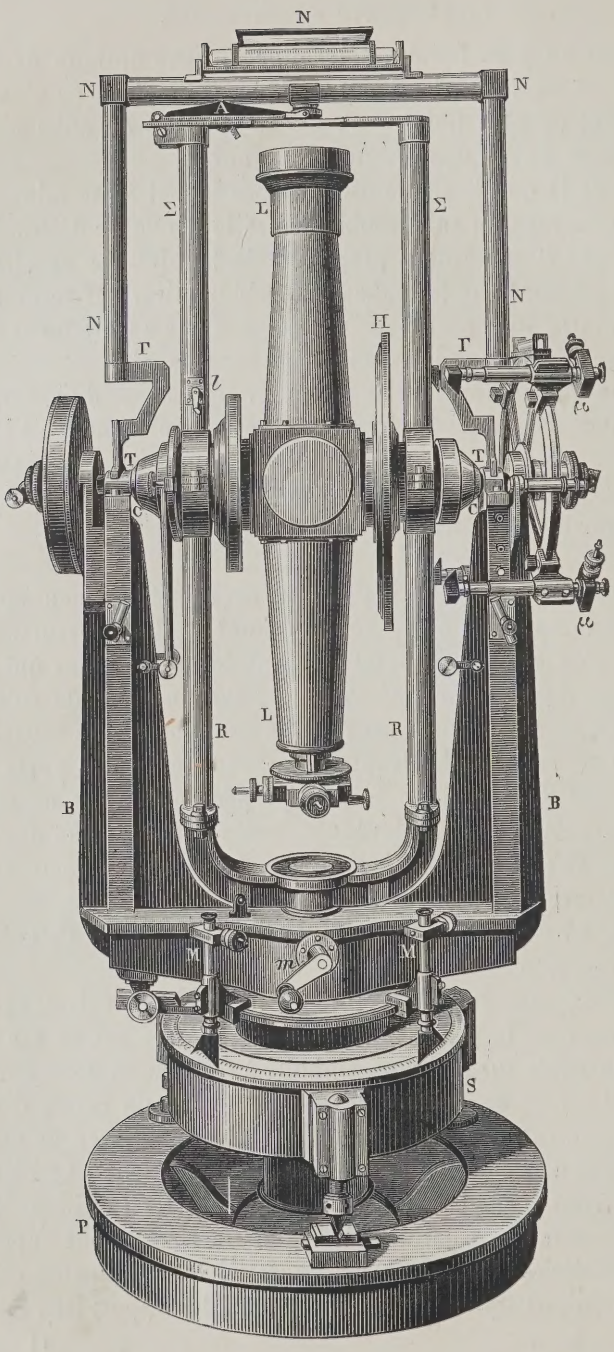
Le mouvement d'horlogerie est en H. L'éclairage du champ est produit par une lampe électrique L, dont la lumière arrive à l'oculaire après avoir été réfléchie par de petits miroirs *r* et *t* et avoir traversé le centre du miroir E, au milieu duquel on a enlevé l'argenture sur un diamètre d'environ 2^{cm}.

201. **Altazimut.** — Cet instrument est immédiatement approprié à la mesure des différences d'azimut et des hauteurs. Il se compose d'un cercle horizontal tournant devant un index qui peut être formé de plusieurs microscopes, avec un axe de rotation vertical terminé par deux bras verticaux supportant les coussinets d'un axe de rotation horizontal. Cet axe horizontal porte une lunette dont l'axe optique lui est perpendiculaire et un cercle divisé tournant avec l'axe devant un index porté par l'un des bras verticaux. Cet index est aussi formé de plusieurs microscopes diamétralement opposés deux à deux.

La *fig.* 53 représente l'altazimut construit par M. P. Gautier pour l'Observatoire de Besançon.

Un socle S reposant sur un pilier P par trois vis calantes porte un bâti BB, dont la partie inférieure se prolonge par un axe vertical A, invisible sur la figure, emboîté à frottement doux dans le socle S. La face supérieure du socle S porte un cercle divisé, *cercle d'azimut*, concentrique à l'axe A, lu au moyen de quatre microscopes micrométriques tels que M, équidistants. Le bâti BB porte les coussinets C sur lesquels reposent les tourillons T de l'axe horizontal de rotation d'une lunette L. Cet axe supporte un cercle divisé H, *cercle de hauteur*, lu par quatre microscopes micrométriques tels que μ. Un double support RR, mis en

Fig. 53.



mouvement par une manivelle *m*, permet de soulever la lunette de façon que les tourillons sortent entièrement des coussinets, et ensuite de la remettre en place, après l'avoir fait tourner de 180° autour de l'axe vertical, de manière à intervertir les deux tourillons. Cet appareil de retournement RR se prolonge par un support ΣΣ qui soutient un niveau NN, par l'intermédiaire d'un levier Λ mis en mouvement par une manivelle *l*, de sorte que l'on peut, à volonté, faire reposer ce niveau sur les tourillons T, ou le soulever et le faire tourner autour de l'axe central.

Cette description indique assez le mode d'emploi de l'instrument. Il suffira, pour l'intelligence de la figure, de dire que les coudes Γ du niveau NN sont rendus nécessaires par la présence des microscopes μ. Ils sont construits de manière à offrir une résistance absolue à la flexion.

202. Sextant. — Cet instrument portatif est destiné à la mesure rapide de l'angle des directions dans lesquelles on voit deux points.

Le principe de sa construction consiste à faire coïncider l'axe optique d'une lunette, avec l'une de ces directions, et à amener par une série de réflexions sur deux miroirs, l'un fixe, l'autre mobile, la direction apparente de l'autre à coïncider avec ce même axe optique. La position du miroir mobile fait connaître l'angle cherché.

Le sextant se compose d'un secteur circulaire TTABCD de 80° environ taillé dans une lame de cuivre épaisse, évidée comme l'indique la *fig.* 54. Derrière cette lame, vers le milieu de l'instrument, est une poignée P qui permet de le tenir à la main. Le secteur porte une *graduation* AB tracée sur une lame d'argent ou de platine incrustée dans le *limbe* CD.

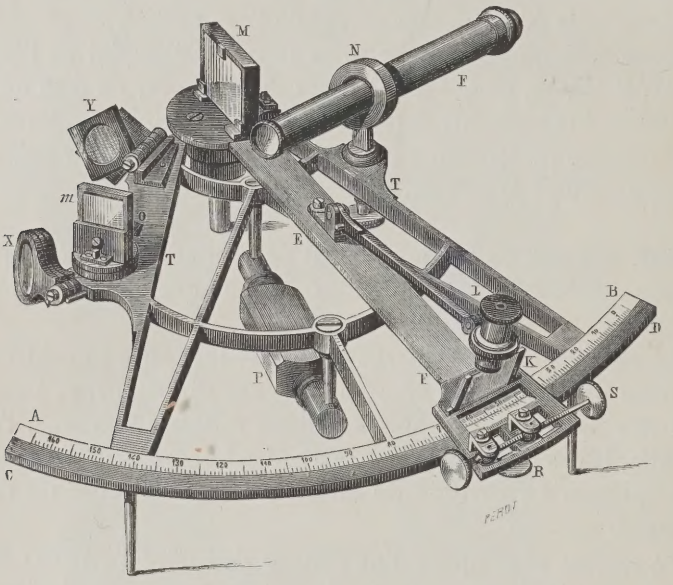
Autour du centre de la graduation tourne une *alidade* EF terminée par un vernier que l'on peut lire au moyen d'une loupe L; une lame de verre dépoli K régularise l'éclairage. L'alidade peut être fixée au limbe par une vis de pression R, et une fois fixée peut recevoir de petits mouvements au moyen d'une vis de rappel S.

L'alidade porte un miroir M dont le plan est perpendiculaire à celui du limbe et passe par son centre. Il est formé d'une plaque

de verre argenté fixée solidement dans une monture de cuivre. Le plan de ce miroir tourne avec l'alidade autour d'un axe perpendiculaire au plan du limbe.

En dehors du rayon extrême du secteur se trouve un second miroir *m*, perpendiculaire au limbe et invariablement fixé au secteur. Ce miroir est argenté seulement dans sa moitié inférieure.

Fig. 54.



En face de ce miroir fixe *m* est une petite lunette astronomique fixe F, pointée à la distance des points à observer, dans le plan focal de laquelle sont deux couples rectangulaires de fils parallèles. On détermine l'axe optique par le centre du carré formé par ces fils.

Cela dit, il est aisé de se rendre compte du maniement du sextant.

En regardant dans la lunette, on voit à travers la partie supérieure du miroir *m* les points situés dans la direction de l'axe optique de la lunette.

On voit aussi d'autres points ayant émis des rayons lumineux qui, après s'être réfléchis successivement sur le miroir M et sur la

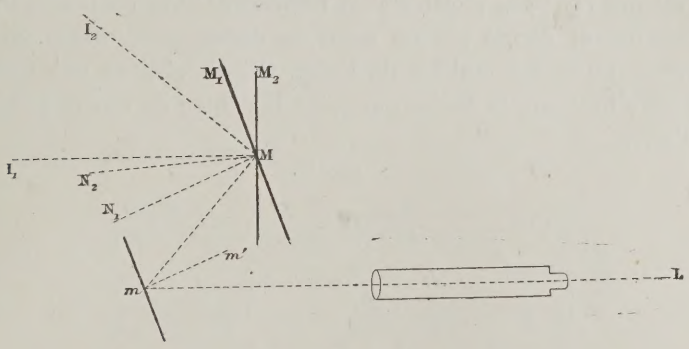
partie inférieure du miroir m, coïncident avec l'axe optique de la lunette. Il est aisé de déterminer la direction de ces points.

Il est évident d'abord que si les deux miroirs sont parallèles, on verra par double réflexion le même point que l'on voit directement à travers la partie supérieure de m. On commence par diriger l'alidade de telle façon qu'il en soit ainsi. On reconnaît que cette condition est réalisée à ce que les deux images, l'une directe, l'autre deux fois réfléchie, d'un même point, coïncident.

Si l'on fait ensuite tourner l'alidade d'un certain angle α, il est aisé de voir que le rayon incident sur le miroir M qui vient après la double réflexion coïncider avec l'axe optique de la lunette tournera de 2α.

Soient, en effet, Lm cet axe optique, m le petit miroir, MM_1 le grand miroir dans la première position, MM_2 dans une seconde.

Fig. 55.



Le premier rayon incident I_1M et la normale MN_1 dans la première position étaient respectivement parallèles à mL et à la normale mm' au miroir m.

En passant de la première position du miroir M à la seconde, la normale tourne d'un angle N_1MN_2 égal à α; l'angle de réflexion sur le miroir M augmente donc de α; il en est de même de l'angle d'incidence. L'angle I_2MN_2 surpassant de α l'angle I_1MN_1, il s'ensuit que l'angle I_1MI_2 est égal à 2α.

Pratiquement on inscrit sur la graduation des angles doubles de ceux qui correspondent réellement aux divisions. De cette

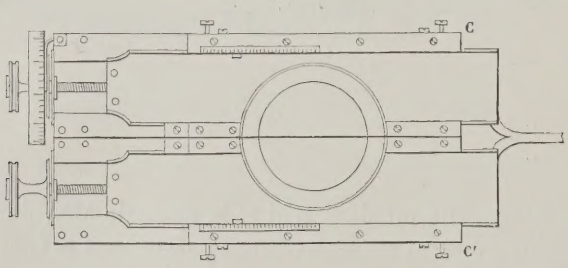
façon, la différence entre la lecture initiale qui correspond au cas où les deux miroirs sont parallèles et la lecture relative à une autre position indique l'angle formé par les directions des deux points visés, l'un directement à travers la partie supérieure du miroir *m*, l'autre par double réflexion sur le miroir M et sur la partie inférieure du miroir *m*.

Sur la *fig.* 55, on voit en X et Y des groupes de verres teintés qui peuvent être placés en face des miroirs *m* et M et sont destinés à diminuer l'intensité des images dans le cas du Soleil ou de la Lune.

203. **Héliomètre.** — L'héliomètre est une lunette astronomique à oculaire, dont l'objectif a été scié suivant un plan passant par l'axe optique en deux moitiés qui peuvent être déplacées au moyen d'une vis micrométrique dans des coulisses CC′ parallèles à la ligne de section.

Quand les deux moitiés sont remises dans la position initiale, l'instrument dirigé sur un astre en donne une image. Si l'on déplace l'une des moitiés de l'objectif, on obtient une seconde image située sur la droite qui joint le centre de ce demi-objectif à l'astre.

Fig. 56.



L'héliomètre sert à déterminer l'angle de position et la distance de deux astres. Pour y parvenir on place d'abord les deux demi-objectifs, de telle façon que leurs centres coïncident. On tourne le système pour rendre la ligne de section parallèle à la ligne qui joint les images des deux astres. Déplaçant ensuite l'un des demi-objectifs, on a deux nouvelles images mobiles. On mesure, au moyen de la vis micrométrique, le déplacement nécessaire pour

faire coïncider l'image mobile du premier astre avec l'image fixe du second. C'est la distance des deux images primitives.

La théorie de l'instrument montre qu'on augmente la précision de la mesure en produisant la coïncidence des deux images sur l'axe optique même de la lentille complète, et pour cela on fait mouvoir non seulement une des demi-lentilles, mais les deux à la fois de quantités égales et de sens contraires. On est aussi conduit à donner à l'oculaire une vis micrométrique et un cercle de position.

L'héliomètre est, comme on voit, un appareil micrométrique. Il offre cet avantage que le grossissement employé à l'oculaire ne modifie pas la distance susceptible d'être mesurée, puisqu'il suffit de voir les deux points en contact, tandis que dans le micromètre à fils le champ est en raison inverse du grossissement.

L'instrument est particulièrement approprié à la mesure du diamètre du Soleil; l'opération se fait en amenant les deux images à être tangentes extérieurement.

CHAPITRE VIII.

MESURE DES ANGLES ET DES ARCS AU MOYEN DES UNITÉS ORDINAIREMENT EMPLOYÉES. — PRÉCISION QUE COMPORTENT LES CALCULS NUMÉRIQUES ; EXEMPLES. — LOGARITHMES D'ADDITION ET DE SOUSTRACTION. — FORMULES PRINCIPALES DE LA TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE. — RÉSOLUTION D'UN TRIANGLE SPHÉRIQUE DANS LE CAS QUI SE PRÉSENTE ORDINAIREMENT EN ASTRONOMIE. — THÉORÈME DE LEGENDRE.

204. Mesure des angles. — Suivant les préceptes de la Géométrie élémentaire, on représente toujours un angle, en Astronomie, par la mesure de l'arc compris entre les côtés de cet angle, dans un cercle ayant pour centre le sommet de l'angle et pour rayon l'unité de longueur.

L'unité d'arc varie, au reste, suivant les cas.

Dans beaucoup de questions, on prend pour unité d'arc l'arc dont la longueur est égale à l'unité de longueur. Les développements des fonctions trigonométriques en séries développées suivant les puissances entières de l'arc sont ordinairement écrits dans cette hypothèse, par exemple, les formules

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \dots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \dots.$$

Dans d'autres cas, on prend pour unité le quart de la circonférence. D'importantes tentatives ont été faites pour généraliser cet usage. La plus célèbre est celle de Laplace, qui a exprimé de cette façon tous les résultats qu'il a obtenus dans sa *Mécanique céleste*. Le quadrant est simplement divisé en parties décimales, dixièmes, centièmes, etc.... Cet usage cependant n'a pas encore prévalu.

Le plus ordinairement l'unité d'arc est la seconde d'arc. Pour l'obtenir, on divise le quadrant en quatre-vingt-dix parties égales dites *degrés;* le degré se divise en soixante parties égales dites

minutes d'arc; la minute en soixante parties égales dites *secondes d'arc;* la seconde se divise en dixièmes, centièmes, etc. Ainsi le quadrant renferme 324000 secondes d'arc.

D'autres fois on divise le quadrant en six parties égales auxquelles on donne le nom d'*heures*. Chaque heure se divise en soixante parties égales nommées *minutes de temps;* chaque minute de temps en soixante parties égales dites *secondes de temps*. La seconde de temps se divise en parties décimales.

205. Valeurs diverses d'un même arc rapportées aux diverses unités. — Soit x la valeur d'un arc rapporté à l'arc égal à l'unité de longueur, y la valeur du même arc rapporté au quadrant, u, v les valeurs de cet arc rapporté à la seconde d'arc ou à la seconde de temps. On a visiblement entre ces quatre nombres les relations

$$x = \frac{\pi}{2} y = \frac{u}{R''} = \frac{v}{R^s},$$

où π désigne le rapport 3, 141592 ... d'une circonférence à son diamètre, R'' le nombre de secondes d'arc, R^s le nombre des secondes de temps contenues dans un arc égal à l'unité de longueur.

Comme nous l'avons dit au n° 204, les relations qui existent entre des fonctions d'un arc et cet arc lui-même, notamment les développements en séries, sont généralement obtenues en prenant le rayon du cercle pour unité. Si l'on veut, dans ces formules, regarder l'arc comme exprimé au moyen d'une autre unité, il faudra, dans ces formules, remplacer x par $\frac{\pi}{2} y$, par $\frac{u}{R''}$, par $\frac{v}{R^s}$, suivant les cas.

Si l'on doit faire le changement dans une équation

$$F(x_1, x_2, x_3, \ldots) = 0$$

où $F(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ désigne un polynôme entier en $x_1, x_2, x_3, \ldots$, n'ayant pas de terme de degré zéro, le facteur $\frac{\pi}{2}$, $\frac{1}{R''}$, $\frac{1}{R^s}$ disparaîtra une fois, de sorte que l'on sera conduit, s'il s'agit, par exemple, de prendre pour unité la seconde d'arc, à remplacer x par u, x^2 par $\frac{u^2}{R''}$, x^3 par $\frac{u^3}{R''^2}$, ...

On a coutume, pratiquement, de regarder l'arc d'une seconde comme se confondant avec son sinus, de sorte que l'on représente le facteur $\frac{1}{R''}$ par $\sin 1''$. La différence est moindre que $\frac{1}{6}\frac{1}{R''^3}$ et elle est, à l'ordinaire, absolument négligeable. Le nombre R'' est égal à 206264,806; son logarithme est 5,31442513.

Le rapport de R'' à R^s est 15, de sorte que l'on a toujours

$$u = 15v.$$

Il n'y aurait donc aucune explication à donner pour passer de u à v, ou de v à u, si ces nombres étaient exprimés purement et simplement en secondes. Mais on a conservé l'habitude de les exprimer en degrés, minutes et secondes d'arc, ou bien en heures, minutes et secondes de temps. L'heure valant quinze degrés, la minute et la seconde de temps valent quinze minutes et quinze secondes d'arc. Cette remarque conduit à un algorithme facile pour écrire en heures un arc exprimé en degrés et *vice versa*.

Soit un arc égal à

$$127^\circ 56' 43'',2.$$

En divisant 127 par 15, on trouve 8 heures, et il reste 7 degrés. Pour en avoir le quinzième, on en prend d'abord le soixantième, 7 minutes, que l'on multiplie par 4. Ces 7 degrés valent donc 28 minutes de temps. Les 56 minutes d'arc donnent, par division par 15, 3 minutes de temps; on a donc 31 minutes de temps. Il reste 11 minutes d'arc, dont on fait 11 secondes en divisant par 60, et 44 secondes de temps en multipliant par 4. Ces 44 secondes de temps s'ajoutent aux 2 secondes de temps que donnent les 43 secondes d'arc; il reste $13'',2$ dont le quotient par 15 est 0,88. L'arc donné vaut donc

$$8^h 31^m 46^s,88.$$

La transformation inverse se fait par les mêmes procédés. 8 heures donnent 120 degrés. Des 31 minutes, 28 donnent le quart de 28 degrés, soit 7 degrés. Les trois autres donnent 45 minutes d'arc. Des 46 secondes de temps, 44 donnent le quart de 44 minutes d'arc, soit 11 minutes d'arc, qui, avec les 45 précédentes, en font 56. Les 2 autres secondes de temps donnent 30 secondes

d'arc, et les $0^s,88$ donnent $13'',20$. On retrouve ainsi le nombre donné.

Pratiquement, on écrit les dixièmes de seconde d'arc et les centièmes de seconde de temps. La correspondance n'est pas absolue puisqu'une seconde de temps vaut, non pas 10, mais 15 secondes d'arc. Seulement le dixième de seconde d'arc est très notablement inférieur à la limite de la précision des observations astronomiques; le centième de sceonde de temps l'est aussi, et il n'y a aucun inconvénient à s'en tenir aux dixièmes de seconde d'arc et aux centièmes de seconde de temps.

206. **Remarques sur la précision des calculs numériques.** — Les calculs numériques, en Astronomie, se font au moyen de Tables donnant soit les logarithmes des nombres, soit les logarithmes des fonctions trigonométriques des arcs. Les Tables ne donnent de ces logarithmes que des valeurs approchées. Si le nombre ou l'arc est exactement connu, le logarithme cherché peut être affecté d'une erreur ω égale à la moitié d'une unité décimale du dernier ordre employé dans la Table. Si le nombre (ou l'arc) est lui-même erroné, et que ω' soit la variation du logarithme qui correspond à l'erreur maximum dont le nombre (ou l'arc) puisse être affecté, le logarithme pourra être en erreur de $\omega + \omega'$.

Réciproquement, si l'on cherche le nombre qui correspond à un logarithme donné, ou un arc connaissant le logarithme d'une de ses lignes trigonométriques, l'erreur dont pourra être affecté ce nombre (ou cet arc) sera la variation de ce nombre (ou de cet arc), correspondant à une variation $\omega + \omega'$ du logarithme donné, ω ayant la même signification que ci-dessus, et ω' étant l'erreur dont ce logarithme donné peut être affecté.

Ces considérations si simples sont de haute importance; leur application conduit à cette conclusion que des formules algébriquement équivalentes peuvent ne pas l'être au point de vue de la précision des résultats que donne leur application. Nous allons en donner deux exemples.

207. **Il vaut mieux déterminer un arc par sa tangente que par son sinus.** — Supposons qu'un angle x étant déterminé par le logarithme de son sinus, ce logarithme puisse être en erreur de ω'.

D'après ce que nous venons de dire, il en résultera pour l'arc, par l'emploi des Tables, une erreur δx donnée par la relation

$$\delta \log \sin x = \omega + \omega',$$

$$\delta x = \frac{\omega + \omega'}{M} \operatorname{tang} x,$$

M désignant le module 0,4342945 des logarithmes vulgaires.

Si l'angle x est déterminé par le logarithme de sa tangente, on a, en désignant par $\delta_1 x$ l'erreur possible de x

$$\delta_1 x = \frac{1}{2} \frac{\omega + \omega'}{M} \sin 2x,$$

de sorte que

$$\delta_1 x = \cos^2 x \, \delta x;$$

on voit que, pour $x = 60^\circ$, la précision déjà est quatre fois plus grande par la tangente que par le sinus; si x approche de 90°, δx devient aussi grand que l'on veut. Si, au contraire, x est peu considérable, moindre que 10 degrés, il sera pratiquement à peu près indifférent de le déterminer par son sinus ou par sa tangente, l'avantage restant d'ailleurs à la tangente. Pour ce motif, on s'astreint, quand il ne s'agit pas d'un très petit angle, à employer des formules le donnant par sa tangente.

Au maximum, on a

$$\delta_1 x = \frac{1}{2} \frac{\omega + \omega'}{M},$$

et si l'on veut exprimer $\delta_1 x$ en secondes d'arc

$$\delta_1 x = \frac{1}{2} \frac{\omega + \omega'}{M} 206264{,}8.$$

Supposons que $\omega + \omega'$ soit *deux* unités du dernier ordre décimal conservé dans les Tables, soit $0{,}1^7$ dans les Tables à sept décimales; on aura

$$\delta_1 x < 0'',05.$$

Si l'on emploie des Tables à cinq décimales, l'erreur sera moindre que 5 secondes.

208. **Précision que comporte la résolution du problème de Képler.** — Soit à résoudre numériquement l'équation de Képler

$$x - e \sin x = m,$$

dans laquelle e et m sont des nombres donnés. On se propose de la résoudre numériquement, ce qui revient toujours à vérifier qu'un nombre x convenablement choisi satisfait à l'équation.

On calculera d'abord $\log(e \sin x)$. Ce logarithme comportera une erreur 2ω. Revenant au nombre, on aura $e \sin x$ avec une erreur possible $\delta(e \sin x)$ donnée par l'équation

$$\frac{M\,\delta(e \sin x)}{e \sin x} = 3\omega,$$

d'où

$$\delta(e \sin x) = \frac{3e\omega \sin x}{M}.$$

x étant un nombre exactement donné, $x - e \sin x$ ou M comportera la même erreur.

D'après cela, toutes les valeurs de x conduisant à des valeurs de M, dont l'écart δM avec M ne dépasse pas $\frac{3e\omega \sin x}{M}$, seront également acceptables. Si donc on résout l'équation de Képler par tâtonnement, on pourra commettre une erreur $\delta_1 x$ telle que

$$\delta_1 x = \frac{\partial x}{\partial M}\delta M = \frac{3e\omega \sin x}{M(1 - e \cos x)},$$

ou, en secondes d'arc,

$$\Delta x = \frac{206265''}{M}\,\frac{3e\omega \sin x}{1 - e \cos x}.$$

Après avoir déterminé l'anomalie excentrique x de l'astre au moyen de son anomalie moyenne m, on est conduit, pour résoudre le problème, à calculer l'anomalie vraie v par l'équation

$$\operatorname{tang}\frac{v}{2} = \operatorname{tang}\frac{x}{2}\operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right),$$

où l'on a posé

$$e = \sin\varphi.$$

Si l'on regarde les arcs φ et x comme exactement connus, on pourra commettre sur $\log \operatorname{tang}\frac{x}{2}$ et $\log \operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)$ des erreurs ω, sur $\log \operatorname{tang}\frac{v}{2}$ une erreur 2ω et, par suite, sur l'angle $\frac{v}{2}$ une erreur

$$\frac{3\omega\, d\frac{v}{2}}{d \log \operatorname{tang}\frac{v}{2}} = \frac{3\omega}{M}\sin\frac{v}{2}\cos\frac{v}{2}.$$

L'erreur possible sur φ serait donc, en secondes d'arc,

$$\frac{3\omega \sin\varphi}{M} 206265'' = 0'',07 \sin\varphi,$$

erreur que l'on peut toujours négliger.

Mais l'arc x n'est pas exactement connu, et l'erreur Δx dont il peut être affecté produit sur φ une erreur $\Delta\varphi$ égale à $\frac{d\varphi}{dx}\Delta x$. L'application de la valeur de $\frac{d\varphi}{dx}$ donnée au second Volume de cet Ouvrage donne, pour cette erreur $\Delta\varphi$, la valeur

$$\Delta\varphi = 0'',07 \frac{e\sin\varphi + e^2\sin\varphi\cos\varphi}{1 - e^2}.$$

Cette erreur est très faible si l'excentricité est petite, comme cela arrive pour les planètes; mais, pour les valeurs voisines de l'unité qui se rencontrent dans les orbites des comètes, l'erreur peut devenir tellement grande que la méthode de calcul doive être abandonnée. Le maximum de $\Delta\varphi$ a lieu pour $\cos\varphi = \frac{\sqrt{1+8e}-1}{4e}$. Si l'on pose $e = 1 - z$ et qu'on néglige les puissances de z, on trouve, pour le maximum,

$$\frac{0'',36}{8z}.$$

Pour $e = 0{,}99$, l'erreur est $4'',5$; pour $e = 0{,}999$, elle est $45''$.

209. **Logarithmes d'addition de Gauss.** — On appelle *Tables de logarithmes d'addition* des Tables imaginées par Gauss, au moyen desquelles, ayant les logarithmes de deux nombres, on trouve aisément le logarithme de leur somme.

Soient a et b deux nombres dont on donne les logarithmes.

On a

$$\log(a+b) = \log a + \log\left(1 + \frac{b}{a}\right).$$

Supposons que l'on ait une Table donnant les valeurs de $\log(1+z)$ qui correspondent à toutes les valeurs de $\log z$. Le calcul de $\log(a+b)$ consistera à faire $\log\frac{b}{a} = \log b - \log a$, puis chercher dans la Table $\log\left(1+\frac{b}{a}\right)$, enfin ajouter $\log a$.

La même Table, employée en sens inverse, sert à trouver le logarithme de la différence de deux nombres connaissant les logarithmes de ces nombres. On a

$$\log(a-b) = \log b + \log\left(\frac{a}{b} - 1\right),$$

où l'on suppose $a > b$. La Table, connaissant

$$\log\frac{a}{b} = \log\left[\left(\frac{a}{b} - 1\right) + 1\right],$$

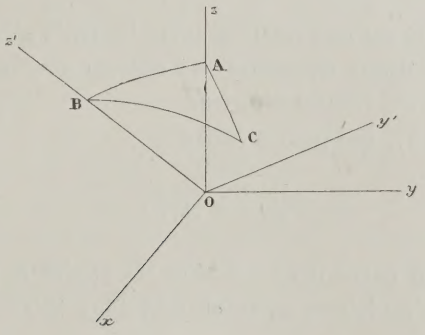
donnera

$$\log\left(\frac{a}{b} - 1\right).$$

En lui ajoutant $\log b$ on aura $\log(a-b)$.

210. **Formules fondamentales de la Trigonométrie sphérique.** — Soit ABC un triangle sphérique sur une sphère ayant pour rayon l'unité de longueur. Déterminons ainsi un système d'axes de coordonnées rectangulaires issus du centre O de la sphère :

Fig. 57.



l'axe Oz passe par le sommet A du triangle ; l'axe Oy lui est perpendiculaire, situé dans le plan OAB, et dirigé de telle façon que la coordonnée y du point B soit négative ; l'axe Ox est perpendiculaire au plan AOB et dirigé du côté de ce plan où se trouve le point C.

Faisons ensuite tourner les axes Oy et Oz, d'un mouvement d'ensemble, d'un angle égal à AOB ; soit Oy', Oz' ces nouveaux axes.

Désignons par A, B, C les angles, a, b, c les côtés opposés du triangle.

Les coordonnées rectangulaires du point C, dans le premier système, sont

$$x = \sin b \sin A, \qquad y = -\sin b \cos A, \qquad z = \cos b.$$

Dans le second système, elles sont

$$x = \sin a \sin B, \qquad y' = \sin a \cos B, \qquad z' = \cos a.$$

D'autre part, on a, entre les nouvelles coordonnées et les anciennes, ces relations

$$\begin{aligned} z' &= -y \sin c + z \cos c, \\ x' &= x, \\ y' &= y \cos c + z \sin c, \end{aligned}$$

qui deviennent, par simple substitution,

$$(1) \qquad \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

$$(2) \qquad \sin a \sin B = \sin b \sin A,$$

$$(3) \qquad \sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A.$$

La formule (1) est une relation entre les trois côtés et un angle; par des permutations circulaires on obtient deux autres formules analogues qu'il est inutile d'écrire.

La formule (2), qui peut s'écrire

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B},$$

est une relation entre deux côtés et les angles opposés. Par des permutations circulaires, on en obtient deux autres, mais les trois se réduisent à deux.

On sait que, s'il existe un triangle ayant pour angles A, B, C, et pour côtés a, b, c, il en existe un autre dont les angles sont $\pi - a$, $\pi - b$, $\pi - c$ et les côtés $\pi - A$, $\pi - B$, $\pi - C$. Si l'on applique à ce second triangle la formule (1), on obtient

$$(4) \qquad \cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a,$$

relation entre les trois angles et un côté. Il existe trois formules

de cette sorte qui se déduisent l'une de l'autre par des permutations circulaires.

Pour obtenir toutes les relations nécessaires à la résolution de tous les cas que peuvent présenter les triangles sphériques, il faut encore une relation entre deux côtés, b, c, l'angle compris A, et l'angle B, opposé à l'un des côtés. La formule (3) ne répond pas immédiatement à la question; elle renferme bien les quatre éléments b, c, A, B, mais elle renferme, en outre, $\sin a$. On peut éliminer $\sin a$ au moyen de la formule (2). On obtient sans peine

$$\cot b \sin c = \cos c \cos A + \sin A \cot B. \tag{5}$$

Il existe six relations de la forme (3) et six de la forme (5). En appliquant les formules (5) au triangle supplémentaire du triangle a, b, c, A, B, C, on retrouve les mêmes formules. En lui appliquant les formules (3) on obtient six relations dont chacune a lieu entre les trois angles et deux côtés, et de cette forme

$$\sin A \cos b = \cos B \sin C + \sin B \cos C \cos a.$$

Toutes ces formules peuvent être utiles; mais il faut remarquer que les formules (1), (2), (4), (5) donnent toutes les relations possibles entre quatre éléments, et, par conséquent suffisent, au point de vue algébrique, pour tous les cas que peut présenter la résolution des triangles.

211. Formules de Gauss et Delambre. — Il existe entre les six éléments des relations très simples dues à Gauss et à Delambre.

Partant de la formule (1), on peut essayer de la soumettre à des transformations analogues à celle qui réussit à l'égard de la formule analogue de la Trigonométrie rectiligne.

On a

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c};$$

on en déduit

$$1 + \cos A = 2\cos^2\frac{A}{2} = \frac{\cos a - \cos(b+c)}{\sin b \sin c} = \frac{2\sin\dfrac{b+c+a}{2}\sin\dfrac{b+c-c}{2}}{\sin b \sin c};$$

$$1 - \cos A = 2\sin^2\frac{A}{2} = \frac{\cos(b-c) - \cos a}{\sin b \sin c} = \frac{2\sin\dfrac{a+b-c}{2}\sin\dfrac{a-b+c}{2}}{\sin b \sin c}.$$

Si l'on pose

$$a+b+c=2p,$$

on a

$$(6)\quad \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-a)}{\sin b\sin c}},\qquad \sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b\sin c}}.$$

A étant moindre que 180°, le sinus et le cosinus de $\frac{A}{2}$ sont positifs.

On a, de même,

$$\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-b)}{\sin a\sin c}},\qquad \sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-c)}{\sin a\sin c}}.$$

On en déduit

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}=\frac{\sin p}{\sin c}\sin\frac{C}{2},\qquad \cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}=\frac{\sin(p-a)}{\sin c}\cos\frac{C}{2},$$

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}=\frac{\sin(p-c)}{\sin c}\sin\frac{C}{2},\qquad \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}=\frac{\sin(p-b)}{\sin c}\cos\frac{C}{2}.$$

Il est aisé de s'assurer que les seconds membres sont bien positifs.

On tire de là, par addition et soustraction,

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}=\dfrac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}, & \dfrac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}=\dfrac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}, \\ \dfrac{\cos\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}=\dfrac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}, & \dfrac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}=\dfrac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}. \end{cases}$$

On écrit mécaniquement ces formules en remarquant que les premiers membres renferment toujours deux lignes trigonométriques différentes, les seconds deux lignes identiques; qu'à un signe + dans un membre, correspond toujours un cosinus dans l'autre, à un signe — un sinus.

En divisant deux à deux ces formules, on en obtient d'autres,

connues sous le nom d'*analogies de Néper,*

$$(8)\quad \begin{cases} \operatorname{tang}\dfrac{A-B}{2} = \dfrac{\sin\dfrac{a-b}{2}}{\sin\dfrac{a+b}{2}}\cot\dfrac{C}{2}, & \operatorname{tang}\dfrac{a-b}{2} = \dfrac{\sin\dfrac{A-B}{2}}{\sin\dfrac{A+B}{2}}\operatorname{tang}\dfrac{c}{2}, \\ \operatorname{tang}\dfrac{A+B}{2} = \dfrac{\cos\dfrac{a-b}{2}}{\cos\dfrac{a+b}{2}}\cot\dfrac{C}{2}, & \operatorname{tang}\dfrac{a+b}{2} = \dfrac{\cos\dfrac{A-B}{2}}{\cos\dfrac{A+B}{2}}\operatorname{tang}\dfrac{c}{2}. \end{cases}$$

212. Résolution d'un triangle sphérique connaissant deux côtés et l'angle compris. — Les formules (1), (2), (3) et les formules (8) sont également propres à la résolution d'un triangle sphérique quand on connaît deux côtés et l'angle compris. A cet effet, les formules (8) s'écrivent ainsi :

$$(9)\quad \begin{cases} \sin\dfrac{c}{2}\cos\dfrac{A-B}{2} = \sin\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{C}{2}, \\ \sin\dfrac{c}{2}\sin\dfrac{A-B}{2} = \sin\dfrac{a-b}{2}\cos\dfrac{C}{2}, \\ \cos\dfrac{c}{2}\cos\dfrac{A+B}{2} = \cos\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{C}{2}, \\ \cos\dfrac{c}{2}\sin\dfrac{A+B}{2} = \cos\dfrac{a-b}{2}\cos\dfrac{C}{2}. \end{cases}$$

Les seconds membres sont connus. En retranchant le logarithme du premier de celui du second, on obtient $\log\operatorname{tang}\dfrac{A-B}{2}$. L'angle $\dfrac{A-B}{2}$ s'en déduit sans ambiguïté puisque l'on connaît le signe de son sinus et celui de son cosinus, $\sin\dfrac{c}{2}$ étant positif. On aura ensuite $\log\sin\dfrac{c}{2}$ au moyen de celle des deux premières formules dont le second membre est le plus grand. De même, les deux dernières formules donnent $\dfrac{A+B}{2}$ par sa tangente, puis $\log\cos\dfrac{c}{2}$. On aura donc $\log\operatorname{tang}\dfrac{c}{2}$ d'où $\dfrac{c}{2}$ et c. Ayant, d'autre part, $\dfrac{A-B}{2}$ et $\dfrac{A+B}{2}$, on en déduit par addition A et par soustraction B.

Les formules (1), (2), (3) servent très fréquemment à la solu-

tion du même problème. Elles sont immédiatement applicables quand on emploie les Tables de logarithmes d'addition et de soustraction; mais elles ne donnent que le troisième côté et l'un des angles inconnus. Il est vrai qu'en les appliquant d'une autre manière on pourrait trouver de même l'autre angle. Mais, le plus souvent, en Astronomie, on n'a besoin que des valeurs du troisième côté et de l'un des angles. S'il en est ainsi, les formules (1), (2), (3) suffisent; il faut seulement, si l'on n'emploie pas les Tables de logarithmes d'addition et de soustraction, rendre les seconds membres calculables par logarithmes.

On remarque, à cet effet, que, si dans les expressions

$$\mathrm{P}\cos\varphi \mp \mathrm{Q}\sin\varphi, \qquad \mathrm{P}\sin\varphi \pm \mathrm{Q}\cos\varphi$$

on pose

$$\mathrm{P} = m\cos\mathrm{M},$$
$$\mathrm{Q} = m\sin\mathrm{M},$$

elles deviennent

$$m\cos(\varphi \pm \mathrm{M}), \qquad m\sin(\varphi \pm \mathrm{M}).$$

Si donc on fait

$$(10) \qquad \begin{cases} \cos b = m\cos\mathrm{M}, \\ \sin b\cos\mathrm{A} = m\sin\mathrm{M}, \end{cases}$$

les équations (1), (2), (3) deviendront

$$(11) \qquad \begin{cases} \cos a = m\cos(c - \mathrm{M}), \\ \sin a\sin\mathrm{B} = \sin b\sin\mathrm{A}, \\ \sin a\cos\mathrm{B} = m\sin(c - \mathrm{M}). \end{cases}$$

On calcule les logarithmes des premiers membres des formules (10); par différence, on a $\log\operatorname{tang}\mathrm{M}$. On choisit ordinairement M de telle sorte que m soit positif. On tire $\log m$ de celle des formules (10) dont le premier membre est le plus grand.

On calcule ensuite les logarithmes des seconds membres des formules (11). La différence des deux derniers donne $\log\operatorname{tang}\mathrm{B}$, d'où $\operatorname{tang}\mathrm{B}$ sans ambiguïté, puisqu'on a le signe de son sinus et celui de son cosinus, $\sin a$ étant positif. On a ensuite $\log\sin a$ par celle des deux dernières formules (11) dont le second membre est le plus grand et, par suite, $\log\operatorname{tang} a$, d'où a sans ambiguïté.

213. **Formules de vérification de Tietjen.** — Reprenons les formules fondamentales (1), (2), (3) et permutons les lettres a et b. Nous avons le système

$$(1^*) \qquad \cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos \mathrm{B},$$
$$(2^*) \qquad \sin b \sin \mathrm{A} = \sin a \sin \mathrm{B},$$
$$(3^*) \qquad \sin b \cos \mathrm{A} = \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos \mathrm{B}.$$

Multiplions l'équation (2^*) par $\cos \mathrm{B}$, l'équation (3^*) par $\sin \mathrm{B}$ et additionnons-les membre à membre ; nous aurons

$$\sin b \sin(\mathrm{A} + \mathrm{B}) = \cos a \sin c \sin \mathrm{B} + 2 \sin a \sin \mathrm{B} \cos \mathrm{B} \sin^2 \frac{c}{2}.$$

Retranchons membre à membre l'équation (1^*) de l'équation (1), nous aurons

$$(\cos a - \cos b)(1 + \cos c) = \sin c (\sin b \cos \mathrm{A} - \sin a \cos \mathrm{B}).$$

Si, dans ces deux formules, nous rendons les seconds membres calculables par logarithmes, en tenant compte des formules (11), nous obtenons les suivantes, qui peuvent être employées comme formules de vérification,

$$(12) \qquad \begin{cases} \sin(\mathrm{A} + \mathrm{B}) = 2m \sin \dfrac{c}{2} \sin \mathrm{B} \operatorname{cosec} b \cos\left(\mathrm{M} - \dfrac{c}{2}\right), \\ \sin \dfrac{b - a}{2} = m \sin \dfrac{c}{2} \operatorname{cosec} \dfrac{b + a}{2} \sin\left(\mathrm{M} - \dfrac{c}{2}\right). \end{cases}$$

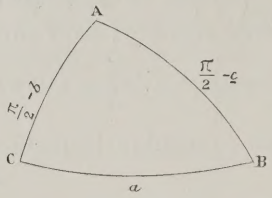
214. **Cas des triangles rectangles.** — Les relations nombreuses entre les éléments d'un triangle sphérique quelconque se réduisent, quand le triangle devient rectangle, aux dix suivantes, dans lesquelles a désigne l'hypoténuse,

$$(13) \qquad \begin{cases} \cos a = \cos b \cos c, \\ \sin b = \sin a \sin \mathrm{B}, \\ \sin c = \sin a \sin \mathrm{C}, \\ \operatorname{tang} c = \operatorname{tang} a \cos \mathrm{B}, \\ \operatorname{tang} b = \operatorname{tang} a \cos \mathrm{C}, \\ \cos a = \cot \mathrm{B} \cot \mathrm{C}, \\ \cos \mathrm{C} = \cos c \sin \mathrm{B}, \\ \cos \mathrm{B} = \cos b \sin \mathrm{C}, \\ \operatorname{tang} b = \sin c \operatorname{tang} \mathrm{B}, \\ \operatorname{tang} c = \sin b \operatorname{tang} \mathrm{C}. \end{cases}$$

Il est aisé de s'assurer que ces relations sont les seules qui existent entre les trois éléments. Leur nombre est bien celui des combinaisons de cinq quantités trois à trois.

On les écrit aisément par le procédé suivant : Qu'on désigne par a l'hypoténuse, par $\frac{\pi}{2} - b$, $\frac{\pi}{2} - c$ les côtés de l'angle droit

Fig. 58.



d'un triangle rectangle, par B et C les angles opposés aux côtés. On a cinq éléments; trois de ces éléments sont consécutifs, ou bien l'un est séparé des deux autres qui sont contigus; dans ce cas, on peut dire que le premier est opposé aux deux derniers. On obtiendra toute relation entre trois éléments en écrivant que le cosinus de l'un est égal au produit des sinus des éléments opposés, ou au produit des cotangentes des éléments adjacents.

215. Théorème de Legendre. — Dans les questions de Géodésie, on a été conduit à considérer des cercles tracés sur une sphère de rayon très grand par rapport aux côtés du triangle. La résolution de ces triangles se fait avec une précision suffisante par l'application du théorème suivant dû à Legendre :

En négligeant les quantités du troisième ordre par rapport à celles du premier, un triangle sphérique de côtés a, b, c, très petits par rapport au rayon R *de la sphère, a la même surface qu'un triangle rectiligne de côtés a, b, c. Les angles du triangle sphérique sont égaux à ceux du triangle rectiligne augmentés du tiers de l'excès sphérique.*

Si l'on désigne par A, B, C les angles du triangle sphérique, par A′, B′, C′ ceux du triangle rectiligne de côtés a, b, c, que l'on pose

$$a + b + c = 2p,$$

que l'on détermine $\sin\frac{A}{2}$ et $\cos\frac{A}{2}$ au moyen des formules (6) du présent Chapitre où l'on devra remplacer a par $\frac{a}{R}$, b par $\frac{b}{R}$, ..., on aura, en conservant les termes du second ordre,

$$\sin\frac{A}{2}=\sin\frac{A'}{2}\sqrt{1+\frac{p(p-a)}{3R^2}},\qquad \cos\frac{A}{2}=\cos\frac{A'}{2}\sqrt{1-\frac{(p-b)(p-c)}{3R^2}},$$

ou, avec la même approximation,

$$\sin\frac{A}{2}=\sin\frac{A'}{2}\left[1+\frac{p(p-a)}{6R^2}\right],\qquad \cos\frac{A}{2}=\cos\frac{A'}{2}\left[1-\frac{(p-b)(p-c)}{6R^2}\right].$$

On en déduit

$$\sin\frac{A-A'}{2}=\frac{1}{2}\sin A'\frac{bc}{6R^2}=\frac{S'}{6R^2},$$

S′ désignant la surface du triangle rectiligne.

On a donc, en exprimant A, B, C; A′, B′, C′ en parties du rayon du cercle trigonométrique,

$$A=A'+\frac{S'}{3R^2},$$
$$B=B'+\frac{S'}{3R^2},$$
$$C=C'+\frac{S'}{3R^2}.$$

Si l'on prend pour unité d'angle l'angle droit, pour unité de surface le huitième de l'aire de la sphère de rayon R, l'aire S du triangle sphérique a la même mesure que l'excès (ε) de la somme des angles A, B, C sur deux droites. Si l'on prend pour unité de surface le carré ayant pour côté l'unité de longueur, la mesure de S devient $\frac{\pi R^2}{2}(\varepsilon)$. Si ε désigne la mesure de l'excès sphérique en parties du rayon du cercle de rayon 1, on a

$$(\varepsilon)=\frac{2}{\pi}\varepsilon,$$

et la mesure de S devient εR^2, ou $(A+B+C-A'-B'-C')R^2$. On a donc les relations suivantes qui, étant homogènes, sont indépendantes des unités choisies

$$S'=S.$$
$$A=A'+\frac{\varepsilon}{3},\qquad B=B'+\frac{\varepsilon}{3},\qquad C=C'+\frac{\varepsilon}{3}.$$

CHAPITRE IX.

INTERPOLATION. FORMULES DE NEWTON, DE LAGRANGE. ALGORITHME DES DIFFÉRENCES. APPLICATION AU CALCUL DES DÉRIVÉES, DE L'INTÉGRALE SIMPLE ET DE L'INTÉGRALE DOUBLE D'UNE FONCTION. MÉTHODE DE GAUSS POUR LE CALCUL D'UNE INTÉGRALE SIMPLE. INTERPOLATION AU MOYEN DES SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES. CALCUL DES COEFFICIENTS. FORMULE DE JACOBI. QUELQUES DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES.

216. Problème de l'interpolation. Solution de Newton. — Connaissant les valeurs $y_1, y_2, \ldots, y_n$, que prend une fonction pour des valeurs données $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de la variable, l'interpolation a pour but de trouver approximativement la valeur de la fonction qui correspond à une valeur quelconque x de la variable.

La fonction n'est pas déterminée ; toute méthode d'interpolation consiste à attribuer à cette fonction une forme particulière dont on détermine les paramètres en écrivant que pour les valeurs x_1, $x_2, \ldots, x_n$ de x, la fonction a les valeurs $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Newton a, le premier, résolu le problème au moyen d'une relation parabolique, en posant

$$y = y_1 + (x - x_1)\alpha_1 + (x - x_1)(x - x_2)\alpha_2 + \ldots + (x - x_1)\ldots(x - x_n)\alpha_n.$$

Pour y parvenir, posons

$$(1)\quad y^{(1)} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x},\quad y_1^{(1)} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},\quad y_2^{(1)} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2},\quad y_3^{(1)} = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3},\quad \ldots.$$

Nous aurons

$$y - y_1 = y^{(1)}(x - x_1).$$

Posons ensuite

$$(1)\qquad y^{(2)} = \frac{y_1^{(1)} - y^{(1)}}{x_2 - x},\quad y_1^{(2)} = \frac{y_2^{(1)} - y_1^{(1)}}{x_3 - x_1},\quad y_2^{(2)} = \frac{y_3^{(1)} - y_2^{(1)}}{x_4 - x_2},\quad \ldots.$$

Nous aurons

$$y^{(1)} = y_1^{(1)} + (x - x_2)y^{(2)}.$$

Si nous posons encore

$$(1)\quad y^{(3)}=\frac{y_1^{(2)}-y^{(2)}}{x_3-x},\quad y_1^{(3)}=\frac{y_2^{(2)}-y_1^{(2)}}{x_4-x_1},\quad y_2^{(3)}=\frac{y_3^{(2)}-y_2^{(2)}}{x_5-x_2},\quad \ldots,$$

nous aurons

$$y^{(2)}=y_1^{(2)}+(x-x_3)\,y^{(3)},$$

et ainsi de suite jusqu'à

$$y^{(n-1)}=y_1^{(n-1)}+(x-x_n)y^{(n)},$$

de sorte que, par substitutions successives, nous obtenons la relation

$$\begin{aligned}y&=y_1+(x-x_1)y_1^1+(x-x_1)(x-x_2)y_1^2+\ldots\\&\quad+(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})y_1^{n-1}+(x-x_1)\ldots(x-x_n)y^n.\end{aligned}$$

217. Expressions symétriques des coefficients introduits. — Les expressions $y_1^1, y_2^1, y_3^1, \ldots, y_1^2, y_2^2, y_3^2, \ldots$ sont susceptibles de formes très symétriques.

On a

$$(2)\qquad y_1^1=\frac{y_1}{x_1-x_2}+\frac{y_2}{x_2-x_1}.$$

$y_2^1, y_3^1, \ldots$ s'en déduisent en augmentant les indices d'une unité. On a

$$y_1^{(2)}=\frac{1}{x_3-x_1}\left(\frac{y_3}{x_3-x_2}+\frac{y_2}{x_2-x_3}-\frac{y_2}{x_2-x_1}-\frac{y_1}{x_1-x_2}\right),$$

$$(2)\quad y_1^{(2)}=\frac{y_3}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}+\frac{y_2}{(x_2-x_3)(x_2-x_1)}+\frac{y_1}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}.$$

$y_2^2, y_3^2, \ldots$ s'en déduisent en augmentant les indices d'une unité. On a

$$y_1^{(3)}=\frac{1}{x_4-x_1}\left[\begin{aligned}&\frac{y_4}{(x_4-x_2)(x_4-x_3)}+\frac{y_3}{(x_3-x_4)(x_3-x_2)}+\frac{y_2}{(x_2-x_3)(x_2-x_4)}\\&-\frac{y_3}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}-\frac{y_2}{(x_2-x_3)(x_2-x_1)}-\frac{y_1}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}\end{aligned}\right],$$

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}y_1^{(3)}=&\frac{y_4}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}+\frac{y_3}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)}\\&+\frac{y_2}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)}+\frac{y_1}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4}\end{aligned}\right.$$

et ainsi de suite.

218. Formules d'interpolation de Newton et de Lagrange. — Ces formules permettent de constater aisément que la fonction

$$(3)\qquad \begin{cases} y = y_1 + (x - x_1)y_1^1 + (x - x_1)(x - x_2)y_1^2 + \dots \\ \qquad + (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_{n-1})y_1^{n-1} \end{cases}$$

se réduit pour $x = x_1$, $x = x_2$, ..., $x = x_n$ à $y_1, y_2, \dots, y_n$.

Faisons $x = x_k$, nous aurons

$$y_1 + (x_k - x_1)y_1^1 + (x_k - x_1)(x_k - x_2)y_1^2 + \dots + (x_k - x_1)(x_k - x_2)\dots(x_k - x_{k-1})y_1^{(k-1)}.$$

On remplacera $y_1^1, y_1^2, \dots, y_1^{k-1}$ par leurs valeurs (2); on remarquera que les premiers termes jusqu'au terme en y_1^{i-1} sont indépendants de y_i. Il suffira d'écrire le coefficient de y_i et de le calculer en commençant l'addition par la droite pour trouver sans aucun effort que ce coefficient est nul si i est différent de k et égal à 1 si $i = k$.

Dans l'expression (3) le coefficient de y_k s'annule par $x = x_1$, $x = x_2$, ..., $x = x_n$ et devient 1 pour $x = x_k$; il est en x du degré $n - 1$. Cette expression peut donc s'écrire

$$(4)\qquad y = \sum \frac{(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)}{(x_k - x_1)(x_n - x_2)\dots(x_k - x_n)} y_k.$$

ce qui est la formule de Lagrange.

219. Algorithme des différences. — Nous supposons désormais que les valeurs données de la variable x soient en progression arithmétique. Soit ω la raison de cette progression arithmétique, a une des valeurs de x. Les valeurs considérées seront représentées par la suite

$$(5)\qquad \dots,\ a - 2\omega,\ a - \omega,\ a,\ a + \omega,\ a + 2\omega,\ \dots.$$

Désignons par $\varphi(x)$ la fonction y. Pour les valeurs (5) de x, cette fonction a les valeurs

$$\dots,\ \varphi^0(a - 2\omega),\ \varphi^0(a - \omega),\ \varphi^0(a),\ \varphi^0(a + \omega),\ \varphi^0(a + 2\omega)\ \dots.$$

Retranchons chacune de ces valeurs de la suivante. Nous aurons les *différences premières* que nous représenterons par le symbole φ^1 en donnant à ce symbole, comme argument, la moyenne

des arguments des deux valeurs qui ont servi à le former de sorte que

$$\varphi^0(a+k\omega)-\varphi^0(a+(k-1)\omega)=\varphi^1\left[a+\left(k-\frac{1}{2}\right)\omega\right].$$

La suite des différences premières est donc

$$\ldots,\quad \varphi^1\left(a-\frac{3}{2}\omega\right),\quad \varphi^1\left(a-\frac{\omega}{2}\right),\quad \varphi^1\left(a+\frac{\omega}{2}\right),\quad \varphi^1\left(a+\frac{3}{2}\omega\right),\quad \ldots,$$

Retranchons de nouveau chacune d'elles de la suivante et représentons chaque *différence seconde* ainsi obtenue par la notation φ^2, en adoptant pour argument la moyenne des arguments des valeurs φ^1 qui ont servi à la former. La suite des différences secondes sera ainsi

$$\ldots,\quad \varphi^2(a-2\omega),\quad \varphi^2(a-\omega),\quad \varphi^2(a),\quad \varphi^2(a+\omega),\quad \varphi^2(a+2\omega),\quad \ldots,$$

et ainsi de suite.

On peut considérer les valeurs de la fonction φ comme étant les différences des valeurs d'une fonction ${}^1\varphi$. L'une de ces valeurs sera arbitraire. Cette fonction ${}^1\varphi$ se présentera comme se déduisant de la fonction φ par intégration, et la valeur initiale arbitraire se confondra avec la constante d'intégration. De même, de la fonction ${}^1\varphi$ on déduira une fonction ${}^2\varphi$ telle que les valeurs de ${}^1\varphi$ soient les différences des valeurs de ${}^2\varphi$ et ainsi de suite. Dans les applications à l'Astronomie, il n'est pas utile d'aller plus loin que la fonction ${}^2\varphi$.

Les valeurs de la variable et celles des diverses fonctions introduites forment un Tableau analogue au suivant :

$a-2\omega$	${}^2\varphi(a-2\omega)$		${}^1\varphi\left(a-\frac{3}{2}\omega\right)$		$\varphi^0(a-2\omega)$		$\varphi^1\left(a-\frac{3}{2}\omega\right)$		$\varphi^2(a-2\omega)$		$\varphi^3\left(a-\frac{3}{2}\omega\right)$
$a-\omega$	${}^2\varphi(a-\omega)$		${}^1\varphi\left(a-\frac{1}{2}\omega\right)$		$\varphi^0(a-\omega)$		$\varphi^1\left(a-\frac{1}{2}\omega\right)$		$\varphi^2(a-\omega)$		$\varphi^3\left(a-\frac{1}{2}\omega\right)$
a	${}^2\varphi(a)$		${}^1\varphi\left(a+\frac{1}{2}\omega\right)$		$\varphi^0(a)$		$\varphi^1\left(a+\frac{1}{2}\omega\right)$		$\varphi^2(a)$		$\varphi^3\left(a+\frac{1}{2}\omega\right)$
$a+\omega$	${}^2\varphi(a+\omega)$		${}^1\varphi\left(a+\frac{3}{2}\omega\right)$		$\varphi^0(a+\omega)$		$\varphi^1\left(a+\frac{3}{2}\omega\right)$		$\varphi^2(a+\omega)$		$\varphi^3\left(a+\frac{3}{2}\omega\right)$
$a+2\omega$	${}^2\varphi(a+2\omega)$				$\varphi^0(a+2\omega)$				$\varphi^2(a+2\omega)$		

On voit que dans l'argument le coefficient de ω est entier si l'indice de la fonction est pair, fractionnaire si cet indice est impair.

Les relations suivantes, souvent utiles, sont évidentes

$$(7)\quad \begin{cases} \varphi^{2k}(a+i''\omega)-\varphi^{2k}(a+i'\omega) \\ \quad =\sum_{i=i'}^{i=i''-1}\varphi^{2k+1}\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right], \\ \varphi^{2k-1}\left[a+\left(i''+\frac{1}{2}\right)\omega\right]-\varphi^{2k-1}\left[a+\left(i'+\frac{1}{2}\right)\omega\right] \\ \quad =\sum_{i=i'}^{i=i''-1}\varphi^{2k}[a+(i+1)\omega]. \end{cases}$$

220. Introduction des moyennes de différences consécutives. — On est conduit à compléter le Tableau (6) en intercalant entre deux nombres d'une même colonne verticale leur moyenne arithmétique. On représente un de ces nouveaux nombres au moyen du signe fonctionnel φ affecté de l'indice commun aux nombres de la colonne à laquelle il appartient, et prenant pour argument la moyenne des arguments des nombres qui le comprennent.

Ainsi on a

$$\varphi^{2k}\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right]=\frac{1}{2}\varphi^{2k}[a+(i+1)\omega]+\frac{1}{2}\varphi^{2k}(a+i\omega),$$

$$\varphi^{2k-1}(a+i\omega)=\frac{1}{2}\varphi^{2k-1}\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right]+\frac{1}{2}\varphi^{2k-1}\left[a+\left(i-\frac{1}{2}\right)\omega\right].$$

Le Tableau (6) ainsi complété, tous les nombres d'une même ligne ont le même argument. Si le coefficient de ω dans l'argument du nombre est entier ou fractionnaire suivant que l'indice fonctionnel est pair ou impair, ce nombre est une différence; dans le cas contraire, ce nombre est une moyenne arithmétique.

On a, entre deux moyennes arithmétiques d'une même colonne, des relations analogues aux relations (7). Ainsi on a, par définition,

$$\begin{aligned} &\varphi^{2k}\left[a+\left(i''+\frac{1}{2}\right)\omega\right]-\varphi^{2k}\left[a+\left(i'+\frac{1}{2}\right)\omega\right] \\ &\quad=\frac{1}{2}\varphi^{2k}[a+(i''+1)\omega]+\frac{1}{2}\varphi^{2k}(a+i''\omega) \\ &\quad\quad-\frac{1}{2}\varphi^{2k}[a+(i'+1)\omega]-\frac{1}{2}\varphi^{2k}(a+i'\omega). \end{aligned}$$

L'application de la première formule (7) aux groupes formés par le premier et le troisième terme, par le deuxième et le quatrième, donne pour cette somme

$$\frac{1}{2}\sum_{i=i'+1}^{i=i''}\varphi^{2k+1}\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right]+\frac{1}{2}\sum_{i=i'}^{i=i''-1}\varphi^{2k}\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right],$$

ou en réunissant les termes de même rang des deux sommes

$$\sum_{i=i'}^{i=i''-1}\varphi^{(2k+1)}[a+(i+1)\omega].$$

On trouve une formule analogue pour les moyennes placées dans des colonnes d'indices impairs.

Ces deux formules et les formules (7) peuvent être réunies en une seule

$$(8)\quad \varphi^{h}[a+(i''+\varepsilon)\omega]-\varphi^{h}[a+(i'+\varepsilon)\omega]=\sum_{i=i'}^{i=i''-1}\varphi^{h+1}\left[a+\left(i+\varepsilon+\frac{1}{2}\right)\omega\right],$$

où ε désigne l'un des nombres o ou $\frac{1}{2}$.

221. **Introduction, dans la formule d'interpolation de Newton, de l'algorithme des différences.** — Dans la formule (3) remplaçons x par $x_1+z\omega$, $x_1, x_2, x_3, \ldots$, par $x_1, x_1+\omega, x_1+2\omega, \ldots$. Elle deviendra

$$y=y_1+z\omega y_1^1+z(z-1)\omega^2 y_1^{(2)}+z(z-1)(z-2)\omega^3 y_1^{(3)}+\ldots.$$

D'autre part, on a

$$y_1^1=\frac{1}{\omega}\varphi^1\left(x_1+\frac{\omega}{2}\right),\qquad y_{\frac{1}{2}}^1=\frac{1}{\omega}\varphi^1\left(x_1+\frac{3\omega}{2}\right),\qquad \ldots,$$

$$y_1^2=\frac{1}{2\omega^2}\varphi^2(x_1+\omega),\qquad y_{\frac{1}{2}}^2=\frac{1}{2\omega^2}\varphi^2(x_1+2\omega),\qquad \ldots,$$

$$y_1^3=\frac{1}{2.3\omega^3}\varphi^3\left(x_1+\frac{3\omega}{2}\right),\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On a donc

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned}\varphi(x_1+z\omega)=\varphi(x_1)+z\varphi^1\left(x_1+\frac{\omega}{2}\right)+\frac{z(z-1)}{1.2}\varphi^2(x_1+\omega)\\ +\frac{z(z-1)(z-2)}{1.2.3}\varphi^3\left(x_1+\frac{3\omega}{2}\right)+\ldots.\end{aligned}\right.$$

C'est la forme ordinairement donnée à la formule d'interpolation de Newton.

222. Formes diverses de la formule d'interpolation. — Remplaçons encore dans la formule (3) x par $x_1 + z\omega$, $x_1, x_2, x_3, \ldots$, par x_1, $x_1 + \omega$, $x_1 - \omega$, $x_1 + 2\omega$, $x_1 - 2\omega$, ... Nous aurons encore

$$\varphi(x_1 + z\omega) = y_1 + z\omega y_1^1 + z(z-1)\omega^2 y_1^2 + z(z-1)(z-2)\omega^3 y_1^3 + \ldots.$$

Pour calculer les coefficients y_1^1, y_1^2, y_1^3, ..., nous observerons que d'après le n° 217 chacun de ces coefficients est une fonction symétrique de celle des valeurs $x_1, x_2, x_3, \ldots$, dont il dépend, de sorte que l'on peut, pour le calculer, disposer ces nombres $x_1, x_2, x_3, \ldots$, dans l'ordre que l'on trouve le plus commode.

On remarquera que y_1^1 ne dépend que de x_1 et x_2, y_1^2 de x_1, x_2, x_3, ... Pour calculer y_1^1 on adoptera l'ordre x_1, x_2, pour calculer y_1^2 l'ordre x_3, x_1, x_2, pour y_1^3 l'ordre x_3, x_1, x_2, x_4, pour y_1^4 l'ordre x_5, x_3, x_1, x_2, x_4, ..., de telle façon que les valeurs de chaque groupe soient en progression arithmétique. Il ne reste plus qu'à observer que les valeurs cherchées résultent de celles qui ont été obtenues au numéro précédent, en y remplaçant, pour y_1^2, x_1 par $x_1 - \omega$, pour y_1^3, x_1 par $x_1 - \omega$, pour y_1^4, x_1, par $x_1 - 2\omega$, ... On aura ainsi

$$\begin{aligned}
y_1^1 &= \frac{1}{\omega}\varphi^1\left(x_1 + \frac{\omega}{2}\right),\\
y_1^2 &= \frac{1}{2\omega^2}\varphi^2(x_1),\\
y_1^3 &= \frac{1}{2.3\omega^3}\varphi^3\left(x_1 + \frac{\omega}{2}\right),\\
y_1^4 &= \frac{1}{2.3.4}\varphi^4(x_1),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

de sorte que l'on obtient la formule

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned}
\varphi(x_1 + z\omega) = \varphi^0(x_1) &+ \frac{z}{1}\varphi^1\left(x_1 + \frac{\omega}{2}\right) + \frac{z(z-1)}{1.2}\varphi^2(x_1)\\
&+ \frac{(z+1)z(z-1)}{1.2.3}\varphi^3\left(x_1 + \frac{\omega}{2}\right)\\
&+ \frac{(z+1)z(z-1)(z-2)}{1.2.3.4}\varphi^4(x_1) + \ldots\\
&+ \frac{1.2\ldots(z+n-1)}{1.2\ldots(2n-1)(1.2\ldots z-n)}\varphi^{2n-1}\left(x_1 + \frac{\omega}{2}\right)\\
&+ \frac{1.2\ldots(z+n-1)}{1.2\ldots 2n.1.2\ldots(z-n-1)}\varphi^{2n}(x_1) + \ldots.
\end{aligned}\right.$$

Si l'on adopte pour x, x_1, x_2, x_3, ... les valeurs $x_1 + z\omega$, x_1, $x_1 - \omega$, $x_1 + \omega$, $x_1 - 2\omega$, $x_1 + 2\omega$, ..., on trouve par des considérations toutes semblables

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned}\varphi(x_1+z\omega) = {}& \varphi^0(x_1) + \frac{z}{1}\varphi^1\left(x_1-\frac{\omega}{2}\right) + \frac{z(z+1)}{1.2}\varphi^2(x_1)\\ &+ \frac{(z-1)z(z+1)}{1.2.3}\varphi^3\left(x_1-\frac{\omega}{2}\right)+\dots\\ &+ \frac{1.2\dots(z+n-1)}{1.2\dots(2n-1)1.2\dots(z-n)}\varphi^{2n-1}\left(x_1-\frac{\omega}{2}\right)\\ &+ \frac{1.2\dots(z+n)}{1.2\dots 2n.1.2\dots(z-n)}\varphi^{2n}(x_1)+\dots.\end{aligned}\right.$$

Si l'on prend la moyenne des seconds membres des équations (10) et (11), on obtient la formule suivante

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned}\varphi(x_1+z\omega) = {}& \varphi^0(x_1) + \frac{z}{1}\varphi^1(x_1)\\ &+ \frac{z^2}{1.2}\varphi^2(x_1) + \frac{(z-1)z(z+1)}{1.2.3}\varphi^3(x_1)+\dots\\ &+ \frac{1.2\dots(z+n-1)}{1.2\dots(2n-1)1.2\dots(z-n)}\varphi^{2n-1}(x_1)\\ &+ \frac{1.2\dots(z+n-1)}{1.2\dots 2n.1.2\dots(z-n)}z\varphi^{2n}(x_1)+\dots.\end{aligned}\right.$$

Si dans la formule (11) on remplace x_1 par $x_1 + \omega$ et z par $z - 1$, le premier membre reste le même. Si l'on prend la moyenne du second membre et du second membre de la formule (10), on trouve

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned}\varphi(x_1+z\omega) = {}& \varphi^0\left(x_1+\frac{\omega}{2}\right)\\ &+ \left(z-\frac{1}{2}\right)\varphi^1\left(x_1+\frac{\omega}{2}\right) + \frac{z(z-1)}{1.2}\varphi^2\left(x_1+\frac{\omega}{2}\right)\\ &+ \frac{z(z-1)}{1.2.3}\left(z-\frac{1}{2}\right)\varphi^3\left(x_1+\frac{\omega}{2}\right)+\dots\\ &+ \frac{1.2\dots(z+n-2)}{1.2\dots(2n-1).1.2\dots(z-n)}\left(z-\frac{1}{2}\right)\varphi^{2n-1}\left(x_1+\frac{\omega}{2}\right)\\ &+ \frac{1.2\dots(z+n-1)}{1.2\dots 2n\,1.2\dots(z-n-1)}\varphi^{2n}\left(x_1+\frac{\omega}{2}\right)+\dots.\end{aligned}\right.$$

Si dans cette dernière formule on remplace z par $\frac{1}{2}$, on a

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned}\varphi\left(x_1+\frac{\omega}{2}\right) = {}& \varphi^0\left(x_1+\frac{\omega}{2}\right) - \frac{1}{8}\varphi^2\left(x_1+\frac{\omega}{2}\right) + \frac{3}{128}\varphi^4\left(x_1+\frac{\omega}{2}\right)+\dots\\ &+ \frac{(-1)^n}{2^{4n}}\frac{1.2\dots 2n}{(1.2\dots n)^2}\varphi^{2n}\left(x_1+\frac{\omega}{2}\right)+\dots.\end{aligned}\right.$$

Dans ce qui suit nous emploierons principalement les formules (12) et (13).

223. Transformation des coefficients des formules d'interpolation. — Pour faciliter les applications il convient de remplacer dans les formules (12) et (13) x_1 par $a+i\omega$ et d'ordonner les coefficients des seconds membres suivant les puissances de z ou d'un nombre équivalent.

Envisageons d'abord la formule (12). Le coefficient de $\varphi^{2n-1}(x_1)$ est

$$\frac{z(z^2-1^2)(z^2-2^2)\dots\left(z^2-\overline{n-1}^2\right)}{1.2\dots 2n-1}.$$

Dans le numérateur de cette expression le coefficient de z^{2h-1} est

$$(-1)^{n-h}\,\mathrm{C}^{(n-h)}[1^2.2^2\dots(n-1)^2],$$

$\mathrm{C}^{n-h}[1^2.2^2\dots(n-1)^2]$ désignant la somme des produits des nombres $1^2.2^2\dots(n-1)^2$ pris $n-h$ à $n-h$; ou

$$\frac{(-1)^{n-h}}{2^{2n-2h}}\,\mathrm{C}^{(n-h)}[2^2.4^2\dots(2n-2)^2].$$

Le coefficient de $\varphi^{2n-1}(x_1)$ dans la formule (12) est donc

$$\sum_{h=1}^{h=n}\frac{(-1)^{n-h}z^{2h-1}}{1.2\dots(2n-1)2^{2n-2h}}\,\mathrm{C}^{n-h}[2^2.4^2\dots(2n-2)^2].$$

On voit de même que le coefficient de $\varphi^{2n}(x_1)$ dans la même formule est

$$\sum_{h=1}^{h=n}\frac{(-1)^{n-h}z^{2h}}{1.2\dots 2n.2^{2n-2h}}\,\mathrm{C}^{n-h}[2^2.4^2\dots(2n-2)^2],$$

de sorte que la formule (12) devient

$$(15)\quad\left\{\begin{array}{l}\varphi[a+(i+z)\omega]=\varphi^0(a+i\omega)\\ \quad+\displaystyle\sum_{n=1}^{n=\infty}\Bigg[\sum_{h=1}^{h=n}\frac{(-1)^{n-h}z^{2h-1}}{1.2\dots(2n-1)2^{2n-2h}}\,\mathrm{C}^{n-h}\left(2^2.4^2\dots\overline{2n-2}^2\right)\varphi^{2n-1}(a+i\omega)\\ \qquad+\displaystyle\sum_{h=1}^{h=n}\frac{(-1)^{n-h}z^{2h}}{1.2\dots 2n\,2^{2n-2h}}\,\mathrm{C}^{n-h}\left(2^2.4^2\dots\overline{2n-2}^2\right)\varphi^{2n}(a+i\omega)\Bigg],\end{array}\right.$$

Pour transformer la formule (13) remplaçons encore x_1 par $a + i\omega$ et z par $y + \frac{1}{2}$. Le coefficient de $\varphi^{2n-1}\left(x_1 + \frac{\omega}{2}\right)$ devient

$$y\frac{\left[y^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]\left[y^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]\cdots\left[y^2-\left(n-\frac{3}{2}\right)^2\right]}{1.2\ldots 2n-1}.$$

Dans le numérateur de cette expression le coefficient de y^{2h-1} est

$$(-1)^{n-h}C^{n-h}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdots\left(\frac{2n-3}{2}\right)^2\right],$$

ou

$$\frac{(-1)^{n-h}}{2^{2n-2h}}C^{n-h}[1^2.3^2\ldots(2n-3)^2].$$

Le coefficient de $\varphi^{2n-1}\left(x_1 + \frac{\omega}{2}\right)$ dans la formule (13) est donc

$$\sum_{h=1}^{h=n}\frac{(-1)^{n-h}y^{2h-1}}{2^{2n-2h}1.2\ldots(2n-1)}C^{n-h}[1^2.3^2\ldots(2n-3)^2].$$

Le coefficient de $\varphi^{2n}\left(x_1 + \frac{\omega}{2}\right)$ est de même

$$\sum_{h=0}^{h=n}\frac{(-1)^{n-h}y^{2h}}{2^{2n-2h}1.2\ldots 2n}C^{n-h}[1^2.3^2\ldots(2n-1)^2].$$

Donc

$$(16)\quad\left\{\begin{array}{l}\varphi[a+(i+z)\omega]=\varphi^0\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right]\\ \quad+\sum_{n=1}^{n=\infty}\left\{\sum_{h=1}^{h=n}\frac{(-1)^{n-h}y^{2h-1}}{2^{2n-2h}1.2\ldots 2n-1}C^{n-h}\left(1^2.3^2\ldots\overline{2n-3}^2\right)\varphi^{2n-1}\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right]\right.\\ \qquad\left.+\sum_{h=0}^{h=n}\frac{(-1)^{n-h}y^{2h}}{2^{2n-2h}1.2\ldots 2n}C^{n-h}\left(1^2.3^2\ldots\overline{2n-1}^2\right)\varphi^{2n}\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right]\right\}.\end{array}\right.$$

Les formules (15) et (16) sont d'une application courante pour la représentation d'une fonction dont on connaît les valeurs pour des valeurs données de la variable. Leur application suppose la connaissance préalable des nombres C^{n-h} qu'il est aisé de calculer.

224. Calcul des sommes des produits de nombres donnés p à p. — MM. Anton et Schram ont donné pour ce calcul un algorithme

représenté dans le Tableau ci-dessous :

α	β	γ	δ	ε	...
1	1	1	1	1	...
	β	γ	δ	ε	...
	α	$\alpha+\beta$	$\alpha+\beta+\gamma$	$\alpha+\beta+\gamma+\delta$	...
		$(\alpha+\beta)\gamma$	$(\alpha+\beta+\gamma)\delta$	$(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\varepsilon$	...
		$\alpha\beta$	$(\alpha+\beta)\gamma+\alpha\beta$	$(\alpha+\beta+\gamma)\delta+(\alpha+\beta)\gamma+\alpha\beta$	...
			$[(\alpha+\beta)\gamma+\alpha\beta]\delta$	$[(\alpha+\beta+\gamma)\delta+(\alpha+\beta)\gamma+\alpha\beta]\varepsilon$	...
			$\alpha\beta\gamma$	$[(\alpha+\beta)\gamma+\alpha\beta]\delta+\alpha\beta\gamma$	...
				$\{[(\alpha+\beta)\gamma+\alpha\beta]\delta+\alpha\beta\gamma\}\varepsilon$	...
				$\alpha\beta\gamma\delta$	...

Pour former ce Tableau on écrit sur une première ligne les nombres

$$\alpha \quad \beta \quad \gamma \quad \delta \quad \ldots,$$

au-dessous les nombres

$$1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad \ldots.$$

Laissant de côté la première colonne $\frac{\alpha}{1}$ on multiplie chaque nombre par celui qui est au-dessous. On a la troisième ligne du Tableau

$$\beta \quad \gamma \quad \delta \quad \varepsilon \quad \ldots.$$

Au-dessous de β on met α et on forme chaque terme de la quatrième ligne en additionnant le terme précédent de cette quatrième ligne avec celui qui est au-dessus de lui.

Laissant de côté la deuxième colonne, on multiplie les termes de la quatrième ligne par ceux de la première : on a la cinquième. Au-dessous du premier terme de cette cinquième ligne on met le produit des deux termes extrêmes de la deuxième colonne et l'on forme la sixième ligne comme on a formé la quatrième, et ainsi de suite.

La quatrième ligne donne les sommes des produits un à un dans le cas d'un nombre, de deux nombres, etc.; la sixième les sommes des produits deux à deux dans le cas de deux nombres, de trois nombres, etc., la huitième les sommes des produits trois à trois, etc.

Si, par exemple, on veut les sommes des produits des carrés des premiers nombres impairs, on aura

1	9	25	49	81	121 ...
1	1	1	1	1	1 ...
	9	25	49	81	121 ...
	1	10	35	84	165 ...
		250	1715	6804	19965 ...
		9	259	1974	8778 ...
			12691	159894	1062138 ...
			225	12916	172810 ...
				1046196	20910010 ...
				11025	1057221 ...
					127923741 ...
					893025 ...

On voit que les nombres de rang pair d'une même colonne de rang $p+1$, abstraction faite des seconds, sont les sommes de produits des carrés des p premiers nombres impairs un à un, deux à deux, etc. Si l'on convient que $C^0(\alpha, \beta, \ldots)$ représente l'unité, ce résultat s'étend au second nombre de chaque colonne.

On obtiendrait de même les sommes des produits des carrés des premiers nombres pairs.

225. Relation entre les coefficients $C^{n-h}\left(1^2.3^2\ldots\overline{2n-1}^2\right)$, $C^{n-h}\left(2^2.4^2\ldots\overline{2n-2}^2\right)$. — Posons

$$(17)\quad P_{n-1}=(x+n-1)(x+n-2)\ldots(x+1)x(x-1)\ldots(x-n+2)(x-n+1),$$

nous aurons aussi

$$(18)\quad \left\{\begin{array}{l} P_{n-1}=x(x^2-1^2)(x^2-2^2)\ldots\left(x^2-\overline{n-1}^2\right) \\ \qquad =\displaystyle\sum_{h=1}^{h=n}(-1)^{n-h}x^{2h-1}C^{n-h}\left(1^2.2^2\ldots\overline{n-1}^2\right), \end{array}\right.$$

Si dans le coefficient C^{n-h} on remplace les nombres $1.2\ldots n-1$ par $2.4\ldots 2n-2$, ce coefficient se multiplie par 2^{2n-2h}; on a donc

$$(19)\qquad P_{n-1}=\sum_{h=1}^{h=n}\frac{(-1)^{n-h}x^{2h-1}}{2^{2n-2h}}C^{n-h}\left(2^2.4^2\ldots\overline{2n-2}^2\right)$$

Dans l'identité (17) posons

$$x = y + \frac{1}{2},$$

nous aurons

$$(20)\quad \begin{cases} P_{n-1} = \left(y+n-\frac{1}{2}\right)\left[y^2-\left(n-\frac{3}{2}\right)^2\right]\left[y^2-\left(n-\frac{5}{2}\right)^2\right]\cdots \\ \qquad \times\left[y^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]\left[y^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right], \end{cases}$$

d'où

$$(21)\quad P_{n-1} = \left(y+n-\frac{1}{2}\right)\sum_{h=1}^{h=n}\frac{(-1)^{n-h}y^{2h-2}}{2^{2n-2h}}\,C^{n-h}\left(1^2.3^2\ldots\overline{2n-3}^2\right).$$

La comparaison des valeurs (19) et (21) donne, en remplaçant y par $x-\frac{1}{2}$,

$$(22)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{h=1}^{h=n}\frac{(-1)^{n-h}x^{2h-1}}{2^{2n-2h}}\,C^{n-h}\left(2^2.4^2\ldots\overline{2n-2}^2\right) \\ \qquad = (x+n-1)\displaystyle\sum_{h=1}^{h=n}\frac{(-1)^{n-h}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2h-2}}{2^{2n-2h}}\,C^{n-h}\left(1^2.3^2\ldots\overline{2n-3}^2\right). \end{cases}$$

Cette formule (22) nous conduira aisément à la relation que nous avons en vue.

Des formules (18) et (20) on déduit

$$(23)\quad P_n = (x^2-n^2)P_{n-1},$$

$$(24)\quad P_n = \left(y+n+\frac{1}{2}\right)\left(y-n+\frac{1}{2}\right)P_{n-1}.$$

Si dans la formule (23) on remplace P_n et P_{n-1} par les valeurs que donne la formule (19), dans la formule (24) par celle que donne la formule (20), on trouve

$$(25)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{h=0}^{h=n}(-1)^{n-h}\frac{x^{2h+1}}{2^{2n-2h}}\,C^{n-h}\left[2^2.4^2\ldots(2n)^2\right] \\ \qquad = (x^2-n^2)\displaystyle\sum_{h=1}^{h=n}(-1)^{n-h}\frac{x^{2h-1}}{2^{2n-2h}}\,C^{n-h}\left(2^2.4^2\ldots\overline{2n-2}^2\right), \end{cases}$$

$$(26)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{h=0}^{h=n}(-1)^{n-h}\frac{y^{2h}}{2^{2n-2h}}\,C^{n-h}\left(1^2.3^2\ldots\overline{2n-1}^2\right) \\ \qquad = \left(y+n-\frac{1}{2}\right)\left(y-n+\frac{1}{2}\right)\displaystyle\sum_{h=}^{h=n}(-1)^{n-h}\frac{y^{2h-2}}{2^{2n-2h}}\,C^{n-h}\left(1^2.3^2\ldots\overline{2n-3}^2\right). \end{cases}$$

Si dans la formule (22) on remplace au second membre, après l'avoir multiplié par $x - n$, $C^{n-h}(1^2.3^2\ldots\overline{2n-3}^2)$ par la valeur que donne la formule (26), on obtient

$$(27)\quad \left\{\begin{array}{l} (x-n)\displaystyle\sum_{h=1}^{h=n}\frac{(-1)^{n-h}x^{2h-1}}{2^{2n-2h}}C^{n-h}\left(2^2.4^2\ldots\overline{2n-2}^2\right) \\ \qquad=\displaystyle\sum_{h=0}^{h=n}\frac{(-1)^{n-h}y^{2h}}{2^{2n-2h}}C^{n-h}\left(1^2.3^2\ldots\overline{2n-1}^2\right). \end{array}\right.$$

La relation

$$x = y + \frac{1}{2}$$

donne

$$dx = dy.$$

Si l'on multiplie le premier membre par dx, le second par dy, et que l'on intègre, on a

$$\sum_{h=1}^{h=n}\frac{(-1)^{n-h}}{2^{2n-2h}}\left(\frac{x^{2h+1}}{2h+1}-n\frac{x^{2h}}{2h}\right)C^{n-h}\left(2^2\ldots\overline{2n-2}^2\right)$$
$$=\sum_{h=0}^{h=n}\frac{(-1)^{n-h}y^{2h+1}}{2^{2n-2h}(2h+1)}C^{n-h}\left(1^2\ldots\overline{2n-1}^2\right)+\text{const.}$$

Pour avoir la valeur de la constante on peut faire $y = 0$ et $x = \frac{1}{2}$, ou $x = 0$ et $y = -\frac{1}{2}$. On a ainsi deux déterminations et en les égalant on obtient

$$(28)\quad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{h=1}^{h=n}\frac{(-1)^{n-h}}{2h+1}C^{n-h}\left(2^2\ldots\overline{2n-2}^2\right)-\sum_{h=1}^{h=n}(-1)^{n-h}\frac{n}{h}C^{n-h}\left(2^2\ldots\overline{2n-2}^2\right) \\ \qquad=\displaystyle\sum_{h=0}^{h=n}\frac{(-1)^{n-h}}{2h+1}C^{n-h}\left(1^2\ldots\overline{2n-1}^2\right). \end{array}\right.$$

Cette formule nous sera utile pour le calcul des intégrales définies. On peut obtenir, par des considérations semblables aux précédentes, un grand nombre d'autres formules utiles pour le même calcul.

226. Valeurs numériques des dérivées successives d'une fonction déduites des valeurs de la fonction. — Dans les formules (15) et

(16) posons

$$a + (i + z)\omega = u,$$

d'où

$$du = \omega\, dz.$$

En différentiant k fois la formule (15) par rapport à z, nous aurons

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} \omega^k \frac{d^k \varphi(u)}{du^k} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \Bigg\{ & \sum_{h=1}^{h=n} \frac{(-1)^{n-h}}{1.2\ldots(2n-1)2^{2n-2h}} \frac{d^k(z^{2h-1})}{dz^k} \\ & \times C^{n-h}\left(2^2.4^2\ldots\overline{2n-2}^2\right)\varphi^{2n-1}(a+i\omega) \\ & + \sum_{h=1}^{h=n} \frac{(-1)^{n-h}}{1.2\ldots 2n\,2^{2n-2h}} \frac{d^k(z^{2h})}{dz^k} \\ & \times C^{n-h}\left(2^2.4^2\ldots\overline{2n-2}^2\right)\varphi^{2n}(a+i\omega)\Bigg\}. \end{aligned}\right.$$

Le second membre est une série linéaire par rapport aux valeurs

$$\varphi^1(a+i\omega),\quad \varphi^2(a+i\omega),\quad \ldots.$$

Dans les coefficients de ces valeurs tous les termes sont nuls dans lesquels l'exposant de z est moindre que k.

La formule (16) donne de même

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} \omega^k \frac{d^k \varphi(u)}{du^k} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \Bigg\{ & \sum_{h=1}^{h=n} \frac{(-1)^{n-h}}{2^{2n-2h}1.2\ldots 2n-1} \frac{d^k(y^{2h-1})}{dy^k} \\ & \times C^{n-h}\left(1^2.3^2\ldots\overline{2n-3}^2\right)\varphi^{2n-1}\left[a+\left(i+\tfrac{1}{2}\right)\omega\right] \\ & + \sum_{h=0}^{h=n} \frac{(-1)^{n-h}}{2^{2n-2h}1.2\ldots 2n} \frac{d^k(y^{2h})}{dy^k} \\ & \times C^{n-h}\left(1^2.3^2\ldots\overline{2n-1}^2\right)\varphi^{2n}\left[a+\left(i+\tfrac{1}{2}\right)\omega\right]\Bigg\}. \end{aligned}\right.$$

Le second membre est une série linéaire par rapport aux valeurs

$$\varphi^1\left[a+\left(i+\tfrac{1}{2}\right)\omega\right],\quad \varphi^2\left[a+\left(i+\tfrac{1}{2}\right)\omega\right],\quad \ldots.$$

Dans les formules (29) et (30) les coefficients des valeurs φ^1, φ^2, φ^3, ... ne sont fonctions que de z ou y. On a donc pu les réduire en Tables. On trouve dans le *Lehrbuch zur Bahnbestimmung der Kometen und Planeten* de M. Th. Oppolzer des Tables

donnant avec six décimales pour toutes les valeurs de z ou de y, de millième en millième, de o à 0,25, les logarithmes de ces coefficients jusqu'à ceux de $\varphi^{(10)}$, pour $k = 1$ et pour $k = 2$.

Un cas particulier important est celui où l'on donne à z ou à y la valeur o. Les formules relatives à ce cas se déduisent des formules (29) et (30) en y remplaçant z ou y par o après le calcul des dérivées $\frac{d^k z^{2h-1}}{dz^k}$, $\frac{d^k z^{2h}}{dz^k}$, ...

Il est manifeste qu'alors tous les termes des formules (29) ou (30) dans lesquels l'exposant de z ou de y est différent de k s'annulent, et qu'il ne reste que ceux dans lesquels l'exposant de z ou de y est précisément égal à k. On obtient des développements de la forme

$$(31)\quad \left\{ \begin{aligned} \omega^k \frac{d^k \varphi(a+i\omega)}{[d(a+i\omega)]^k} &= \varphi^k(a+i\omega) \\ &\quad + N_k^{k+2} \varphi^{k+2}(a+i\omega) + N_k^{k+4} \varphi^{k+4}(a+i\omega) + \dots, \end{aligned} \right.$$

$$(32)\quad \left\{ \begin{aligned} \omega^k \frac{d^k \varphi\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right]}{\left\{d\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right]\right\}^k} &= \varphi^k\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right] \\ &\quad + M_k^{k+2} \varphi^{k+2}\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right] \\ &\quad + M_k^{k+4} \varphi^{k+4}\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right] + \dots. \end{aligned} \right.$$

On trouve dans l'Ouvrage cité de M. Oppolzer, sous forme de fractions irréductibles, les valeurs de ces coefficients N, M pour toutes les valeurs des indices inférieurs ou supérieurs qui ne dépassent pas 20.

227. Développement de $\varphi(u)$ en séries ordonnées suivant les puissances de z ou de y. — La formule de Taylor donne

$$\varphi(u) = \varphi(a+i\omega) + \frac{z\omega}{1} \frac{d\varphi(a+i\omega)}{d(a+i\omega)} + \frac{(z\omega)^2}{1.2} \frac{d^2\varphi(a+i\omega)}{d(a+i\omega)^2} + \dots,$$

$$\varphi(u) = \varphi\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right] + \frac{y\omega}{1} \frac{d\varphi\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right]}{d\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right]} + \frac{(y\omega)^2}{1.2} \frac{d^2\varphi\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right]}{d\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right]^2} + \dots$$

Si l'on remplace dans ces formules les dérivées successives et les fonctions $\varphi(a+i\omega)$, $\varphi\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right]$ par leurs développements, on trouve

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned}\varphi[a+(i+z)\omega] = \varphi^0(a+i\omega) + z\ &[\varphi^1(a+i\omega) + N_1^3\varphi^3(a+i\omega)\\ &+ N_1^5\varphi^5(a+i\omega)+\dots]\\ &+\frac{z^2}{1.2}[\varphi^2(a+i\omega)+N_2^4\varphi^4(a+i\omega)\\ &+ N_2^6\varphi^6(a+i\omega)+\dots]\\ &+\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{aligned}\right.$$

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned}\varphi\left[a+\left(i+\tfrac{1}{2}+\gamma\right)\omega\right] = \quad &\varphi^0\left[a+\left(i+\tfrac{1}{2}\right)\omega\right] + M_0^2\varphi^2\left[a+\left(i+\tfrac{1}{2}\right)\omega\right]\\ &+ M_0^4\varphi^4\left[a+\left(i+\tfrac{1}{2}\right)\omega\right]+\dots\\ +\gamma\ &\left\{\varphi^1\left[a+\left(i+\tfrac{1}{2}\right)\omega\right] + M_1^3\varphi^3\left[a+\left(i+\tfrac{1}{2}\right)\omega\right]\right.\\ &\left.+ M_1^5\varphi^5\left[a+\left(i+\tfrac{1}{2}\right)\omega\right]+\dots\right\}\\ +\frac{\gamma^2}{1.2}&\left\{\varphi^2\left[a+\left(i+\tfrac{1}{2}\right)\omega\right] + M_2^4\varphi^4\left[a+\left(i+\tfrac{1}{2}\right)\omega\right]\right.\\ &\left.+ M_2^6\varphi^6\left[a+\left(i+\tfrac{1}{2}\right)\omega\right]+\dots\right\}\\ +&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{aligned}\right.$$

228. **Application.** — Nous empruntons à l'Ouvrage cité de M. Oppolzer une application au calcul d'une coordonnée ξ de la planète (62) Erato. Dans le Tableau (A) la première colonne indique les dates auxquelles correspondent les valeurs φ^0 de cette coordonnée ξ inscrites en face de ces dates dans la seconde colonne. Les colonnes suivantes renferment les différences successives. On a en chiffres gras complété le Tableau par les moyennes.

TABLEAU A.

	φ^0.	φ^1.	φ^2.	φ^3.	φ^4.	φ^5.	φ^6.	φ^7.	φ^8.
1871 Avril 26.....	230820,18								
»	**208684,99**	—44270,38							
Juin 5.....	186549,80	**—48711,50**	— 8882,24						
»	**159973,49**	—53152,62	**— 8034,58**	+1695,32					
Juillet 15....	133397,18	**—56746,08**	— 7186,92	**+2142,00**	+893,35				
»	**103227,41**	—60339,54	**— 5892,59**	+2588,67	**+844,53**	— 97,65			
Août 24.....	73057,64	**—62638,67**	— 4548,25	**+2986,52**	+795,70	**—190,79**	—186,28		
»	**40588,75**	—64937,79	**— 2906,07**	+3384,37	**+653,74**	—283,93	**—180,57**	+11,42	
Octobre 3...	8119,85	**—65544,73**	— 1213,88	**+3640,26**	+511,77	**—371,46**	—174,86	**+44,17**	+65,50
» ..	**— 24955,99**	—66151,67	**+ 734,19**	+3896,14	**+282,38**	—458,79	**—136,40**	+76,92	
Novembre 12.	— 58031,82	**—64810,54**	+ 2682,26	**+3922,63**	+ 52,98	**—507,76**	— 97,94		
» .	**— 89766,53**	—63469,41	**+ 4656,82**	+3949,12	**—225,39**	—556,73			
Décembre 22.	—121501,23	**—60153,72**	+ 6631,38	**+3697,25**	—503,75				
» .	**—149920,25**	—56838,03	**+ 8354,07**	+3445,37					
Janvier 31...	—178339,26	**—51799,66**	+10076,75						
» ...	**—201719,90**	—46761,28							
Mars 11.....	—225100,54								

Soit à calculer les dérivées première et seconde pour 1871 octobre 3 par rapport au temps t, en prenant pour unité de temps l'intervalle ω de 40 jours. La formule (31) donne, en prenant pour $a + i\omega$ le 3 octobre

$$\frac{d\xi(a+i\omega)}{d(a+i\omega)} = \varphi^1(a+i\omega) + N_1^3\varphi^3(a+i\omega) + N_1^5\varphi^5(a+i\omega) + \dots,$$
$$\frac{d^2\xi(a+i\omega)}{d(a+i\omega)^2} = \varphi^2(a+i\omega) + N_2^4\varphi^4(a+i\omega) + N_2^6\varphi^6(a+i\omega) + \dots.$$

Les valeurs $\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3, \dots$ se succèdent dans la ligne du Tableau (A) qui correspond au 3 octobre. On a donc

$\varphi^1 = -65544{,}73,$	$\varphi^2 = -1213{,}88,$
$\varphi^3 = +3640{,}26,$	$\varphi^4 = +511{,}77,$
$\varphi^5 = -371{,}46,$	$\varphi^6 = -174{,}86,$
$\varphi^7 = +44{,}17,$	$\varphi^8 = +65{,}50.$

On a d'autre part

$N_1^3 = -1:6,$	$N_2^4 = -1:12,$
$N_1^5 = +1:30,$	$N_2^6 = +1:90,$
$N_1^7 = -1:140,$	$N_2^8 = -1:560.$

On en conclut

$\varphi^1 = -65544{,}73$	$\varphi^2 = -1213{,}88$
$N_1^3\varphi^3 = -606{,}71$	$N_2^4\varphi^4 = -42{,}65$
$N_1^5\varphi^5 = -12{,}38$	$N_2^6\varphi^6 = -1{,}94$
$N_1^7\varphi^7 = -0{,}32$	$N_2^8\varphi^8 = -0{,}12$
d'où $\frac{d\xi(a+i\omega)}{d(a+i\omega)} = -66164{,}14$	$\frac{d^2\xi(a+i\omega)}{d(a+i\omega)^2} = -1258{,}59$

Soit à calculer les dérivées première et seconde par rapport au temps t pour 1871 septembre 13 qui est au milieu de l'intervalle entre le 24 août et le 3 octobre.

La formule (32) donne

$$\frac{d\varphi\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right]}{d\left[a+i+\frac{1}{2}\omega\right]} = \varphi^1\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right] + M_1^3\varphi^3\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right] + \dots,$$
$$\frac{d^2\varphi\left[a+i+\frac{1}{2}\omega\right]}{d\left[a+i+\frac{1}{2}\omega\right]^2} = \varphi^2\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right] + M_2^4\varphi^4\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right] + \dots.$$

Les valeurs de φ^1, φ^2, φ^3, ... se succèdent dans la ligne du tableau (A) intermédiaire entre le 24 août et le 3 octobre. On a

$$\varphi^1 = -64937{,}79, \qquad \varphi^2 = -2906{,}07,$$
$$\varphi^3 = +3384{,}37, \qquad \varphi^4 = +653{,}74,$$
$$\varphi^5 = -283{,}93, \qquad \varphi^6 = -180{,}57,$$
$$\varphi^7 = +11{,}42, \qquad \varphi^8 = +65{,}50,$$

en supposant φ^8 constant. Et

$$M_1^3 = -\frac{1}{24}, \qquad M_2^4 = -\frac{5}{24},$$
$$M_1^5 = \frac{3}{640}, \qquad M_2^6 = \frac{259}{5760},$$
$$M_1^7 = -\frac{5}{7168}, \qquad M_2^8 = -\frac{3229}{322560},$$

d'où

$$\varphi^1 = -64937{,}79 \qquad \varphi^2 = -2906{,}07$$
$$M_1^3\varphi^3 = -141{,}02 \qquad M_2^4\varphi^4 = -136{,}20$$
$$M_1^5\varphi^5 = -1{,}33 \qquad M_2^6\varphi^6 = -8{,}12$$
$$M_1^7\varphi^7 = -0{,}01 \qquad M_2^8\varphi^8 = -0{,}66$$

$$\frac{d\varphi\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right]}{d\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right]} = -65080{,}15 \qquad \frac{d^2\varphi\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right]}{d\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right]^2} = -3051{,}05$$

Ces exemples suffisent pour montrer la marche des calculs auxquels donne lieu l'application des formules relatives au calcul des dérivées. Si l'on voulait appliquer les formules (29), (30), il faudrait recourir aux Tables des coefficients données dans l'Ouvrage de M. Oppolzer.

229. **Calcul numérique de l'intégrale d'une fonction.** — Nous nous occuperons plus loin des méthodes générales pour le calcul numérique des intégrales définies. Nous supposerons ici que la fonction soumise à l'intégration soit donnée par les valeurs numériques qu'elle prend pour des valeurs de la variable en progression arithmétique. Nous conservons les notations des paragraphes précédents.

Reprenons à cet égard les formules (15) et (16). Multiplions-les par $\omega\,dz$ et intégrons depuis la limite inférieure zéro jusqu'à z.

La formule (15) nous donne

$$
(35)\quad
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{1}{\omega}\int_0^z \varphi[a+(i+z)\omega]\,dz \\
&\quad=\varphi^0(a+i\omega)z+\sum_{n=1}^{n=\infty}\Bigg[\sum_{h=1}^{h=n}\frac{(-1)^{n-h}z^{2h}}{1.2\ldots 2n-1.2^{2n-2h}.2h} \\
&\qquad\times C^{n-h}\left(2^2.4^2\ldots\overline{2n-2}^2\right)\varphi^{2n-1}(a+i\omega) \\
&\qquad+\sum_{h=1}^{h=n}\frac{(-1)^{n-h}z^{2h+1}}{1.2\ldots 2n.2^{2n-2h}(2h+1)} \\
&\qquad\times C^{n-h}\left(2^2.4^2\ldots\overline{2n-2}^2\right)\varphi^{2n}(a+i\omega)\Bigg].
\end{aligned}
\right.
$$

La formule (16) donne

$$
(36)\quad
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{1}{\omega}\int_0^y \varphi\left[a+\left(i+\frac{1}{2}+y\right)\omega\right]dy \\
&\quad=\varphi^0\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right]y+\sum_{n=1}^{n=\infty}\Bigg\{\sum_{h=1}^{h=n}\frac{(-1)^{n-h}y^{2h}}{1.2\ldots 2n-1.2^{2n-2h}.2h} \\
&\qquad\times C^{n-h}\left(1^2\ldots\overline{2n-3}^2\right)\varphi^{2n-1}\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right] \\
&\qquad+\sum_{h=0}^{h=n}\frac{(-1)^{n-h}y^{2h+1}}{1.2\ldots 2n.2^{2n-2h}(2h+1)} \\
&\qquad\times C^{n-h}\left(1^2\ldots\overline{2n-1}^2\right)\varphi^{2n}\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right]\Bigg\}.
\end{aligned}
\right.
$$

On a fréquemment à appliquer ces formules en prenant pour limites $-\frac{1}{2}$ et $+\frac{1}{2}$. A cet égard on remarquera que l'on a

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}=\int_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{-\frac{1}{2}},$$

et que, d'autre part, dans les seconds membres, les termes de degré pair disparaîtront tandis que ceux de degré impair se doubleront. On a ainsi

$$
(37)\quad
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{1}{\omega}\int_{a+\left(i-\frac{1}{2}\right)\omega}^{a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega}\varphi(u)\,du \\
&\qquad=\varphi^0(a+i\omega)+\sum_{n=1}^{n=\infty}\sum_{h=1}^{h=n}\frac{(-1)^{n-h}}{1.2\ldots 2n.2^{2n}(2h+1)} \\
&\qquad\times C^{n-h}\left(2^2.4^2\ldots\overline{2n-2}^2\right)\varphi^{2n}(a+i\omega),
\end{aligned}
\right.
$$

et

$$(38)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int_{a+i\omega}^{a+(i+1)\omega} \varphi(u)\,du \\ \quad = \varphi^0\left[a+\left(i+\dfrac{1}{2}\right)\omega\right] + \displaystyle\sum_{n=1}^{n=\infty}\sum_{h=0}^{h=n} \frac{(-1)^{n-h}}{1.2\ldots 2n.2^{2n}(2h+1)} \\ \qquad \times C^{n-h}\left(1^2.3^2\ldots\overline{2n-1}^2\right)\varphi^{2n}\left[a+\left(i+\dfrac{1}{2}\right)\omega\right]. \end{array}\right.$$

Si l'on veut que l'intégrale s'étende à plusieurs intervalles, égaux à ω, consécutifs, on la décomposera en autant d'intégrales s'étendant à un seul intervalle. Dans toutes ces intégrales partielles le coefficient de φ^{2n} sera le même, de sorte que dans l'intégrale totale ce coefficient multipliera la somme d'un certain nombre de valeurs consécutives de φ^{2n}, somme qui s'exprime par la différence (form. 8) de deux valeurs de φ^{2n-1}. On déduit ainsi des formules (37) et (38) les suivantes

$$(39)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int_{a-\frac{1}{2}\omega}^{a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega} \varphi(u)\,du \\ \quad = {}^1\varphi\left[a+\left(i+\dfrac{1}{2}\right)\omega\right] - {}^1\varphi\left(a-\dfrac{1}{2}\omega\right) \\ \qquad + \displaystyle\sum_{n=1}^{n=\infty}\sum_{h=1}^{h=n} \frac{(-1)^{n-h}}{1.2\ldots 2n.2^{2n}(2h+1)}\, C^{n-h}\left(2^2.4^2\ldots\overline{2n-2}^2\right) \\ \qquad \times\left\{\varphi^{2n-1}\left[a+\left(i+\dfrac{1}{2}\right)\omega\right] - \varphi^{2n-1}\left(a-\dfrac{1}{2}\omega\right)\right\}. \end{array}\right.$$

$$(40)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int_{a}^{a+i\omega} \varphi(u)\,du \\ \quad = {}^1\varphi(a+i\omega) - {}^1\varphi(a) \\ \qquad + \displaystyle\sum_{n=1}^{n=\infty}\sum_{h=0}^{h=n} \frac{(-1)^{n-h}}{1.2\ldots 2n.2^{2n}(2h+1)}\, C^{n-h}\left(1^2.3^2\ldots\overline{2n-1}^2\right) \\ \qquad \times[\varphi^{2n-1}(a+i\omega) - \varphi^{2n-1}(a)]. \end{array}\right.$$

Les nombres ${}^1\varphi$ sont déterminés quand on connaît l'un d'eux. On peut le choisir arbitrairement, et il peut être commode de supposer ${}^1\varphi\left(a-\dfrac{\omega}{2}\right) = 0$; mais le plus souvent on profite de l'indétermination de ce nombre pour annuler dans les formules pré-

cédentes les sommes de seconds termes. On a ainsi pour la formule (39)

$$
{}^1\varphi\left(a-\frac{\omega}{2}\right)
=-\sum_{n=1}^{n=\infty}\sum_{h=1}^{h=n}\frac{(-1)^{n-h}}{1.2\ldots 2n.2^{2n}(2h+1)}\,C^{n-h}\left(2^2\ldots\overline{2n-2}^2\right)\varphi^{2n-1}\left(a-\frac{\omega}{2}\right),
$$

et pour la formule (40)

$$
\begin{aligned}
{}^1\varphi\left(a-\frac{\omega}{2}\right)&=-\frac{1}{2}\varphi^0(a)\\
&\quad-\sum_{n=1}^{n=\infty}\sum_{h=0}^{h=n}\frac{(-1)^{n-h}}{1.2\ldots 2n.2^{2n}(2h+1)}\,C^{n-h}\left(1^2.3^2\ldots\overline{2n-1}^2\right)\varphi^{2n-1}(a).
\end{aligned}
$$

Si l'on veut que dans la formule (40) la limite inférieure de l'intégrale soit $a-\frac{\omega}{2}$, on ajoutera au second membre la valeur de l'intégrale $\frac{1}{\omega}\int_{a-\frac{\omega}{2}}^{a}\varphi(u)\,du$. Cette valeur s'obtient en supposant dans la formule (35) $i=0$, $z=-\frac{1}{2}$. Dans l'expression obtenue pour $\int_{a-\frac{\omega}{2}}^{a+i\omega}\varphi(u)\,du$, on remplace

$$
\begin{aligned}
\varphi^0(a)\quad&\text{par}\quad {}^1\varphi\left(a+\frac{\omega}{2}\right)-{}^1\varphi\left(a-\frac{\omega}{2}\right),\\
{}^1\varphi(a)\quad&\text{par}\quad \frac{1}{2}\,{}^1\varphi\left(a+\frac{\omega}{2}\right)+\frac{1}{2}\,{}^1\varphi\left(a-\frac{\omega}{2}\right),\\
\varphi^{2n-1}(a)\quad&\text{par}\quad \frac{1}{2}\,\varphi^{2n-1}\left(a+\frac{\omega}{2}\right)+\frac{1}{2}\,\varphi^{2n-1}\left(a-\frac{\omega}{2}\right),\\
\varphi^{2n}(a)\quad&\text{par}\quad \varphi^{2n-1}\left(a+\frac{\omega}{2}\right)-\varphi^{2n-1}\left(a-\frac{\omega}{2}\right).
\end{aligned}
$$

L'application immédiate de la formule (28) montre que les termes en $\varphi^{2n-1}\left(a+\frac{\omega}{2}\right)$ se détruisent et donne

$$
(41)\quad
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{1}{\omega}\int_{a-\frac{\omega}{2}}^{a+i\omega}\varphi(u)\,du\\
&\quad={}^1\varphi(a+i\omega)+\sum_{n=1}^{n=\infty}\sum_{h=0}^{h=n}\frac{(-1)^{n-h}C^{n-h}\left(1^2.3^2\ldots\overline{2n-1}^2\right)}{1.2\ldots 2n.2^{2n}(2h+1)}\,\varphi^{2n-1}(a+i\omega)\\
&\qquad-{}^1\varphi\left(a-\frac{\omega}{2}\right)-\sum_{n=1}^{n=\infty}\sum_{h=1}^{h=n}\frac{(-1)^{n-h}C^{n-h}\left(2^2.4^2\ldots\overline{2n-2}^2\right)}{1.2\ldots 2n.2^{2n}(2h+1)}\,\varphi^{2n-1}\left(a-\frac{\omega}{2}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

De même, si l'on veut que dans la formule (39) la limite inférieure de l'intégrale soit a, on retranchera de l'expression (39) l'intégrale $\int_{a-\frac{\omega}{2}}^{a} \varphi(u)\,du$ qui se déduit encore de la formule (35) en faisant $i = 0$, $z = -\frac{1}{2}$. Dans le résultat obtenu on remplacera

$$\frac{1}{2}\varphi^{2n}(a) + \varphi^{2n-1}\left(a-\frac{\omega}{2}\right) \quad \text{par} \quad \varphi^{2n-1}(a),$$

et l'application immédiate de la formule (28) donnera

$$\left\{\begin{aligned}\frac{1}{\omega}\int_a^{a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega} \varphi(u)\,du = {}&{}^1\varphi\left(a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right)\\ &+\sum_{n=1}^{n=\infty}\sum_{h=1}^{h=n}\frac{(-1)^{n-h}C^{n-h}\left(2^2.4^2\ldots\overline{2n-2}^2\right)}{1.2\ldots2n.2^{2n}(2h+1)}\varphi^{2n-1}\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right]\\ &-{}^1\varphi\left(a-\frac{\omega}{2}\right)-\frac{1}{2}\varphi^0(a)\\ &-\sum_{n=1}^{n=\infty}\sum_{h=0}^{h=n}\frac{(-1)^{n-h}C^{n-h}\left(1^2.3^2\ldots\overline{2n-1}^2\right)}{1.2\ldots2n.2^{2n}(2h+1)}\varphi^{2n-1}(a).\end{aligned}\right.$$

Si l'on pose

$$P_1^{2n-1} = \sum_{h=1}^{h=n}\frac{(-1)^{n-h}C^{n-h}\left(2^2.4^2\ldots\overline{2n-2}^2\right)}{1.2\ldots2n.2^{2n}(2h+1)},$$

$$Q_1^{2n-1} = \sum_{h=0}^{h=n}\frac{(-1)^{n-h}C^{n-h}\left(1^2.3^2\ldots\overline{2n-1}^2\right)}{1.2\ldots2n.2^{2n}(2h+1)},$$

et que l'on détermine dans les formules (41) et (42) ${}^1\varphi\left(a-\frac{\omega}{2}\right)$ d'une façon analogue à celle qui a été indiquée pour les formules (39) et (40), on a les quatre couples de formules

$$(39)^*\quad\left\{\begin{aligned}&{}^1\varphi\left(a-\frac{\omega}{2}\right) = -\left[P_1^1\varphi^1\left(a-\frac{\omega}{2}\right)\right.\\ &\qquad\left.+P_1^3\varphi^3\left(a-\frac{\omega}{2}\right)+P_1^5\varphi^5\left(a-\frac{\omega}{2}\right)+\ldots\right];\\ &\frac{1}{\omega}\int_{a-\frac{\omega}{2}}^{a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega}\varphi(u)\,du = {}^1\varphi\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right]\\ &\quad+P_1^1\varphi^1\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right]+P_1^3\varphi^3\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right]+\ldots\end{aligned}\right.$$

et

$$(40)^\star\quad\begin{cases}{}^1\varphi\left(a-\dfrac{\omega}{2}\right)=-\left[\dfrac{1}{2}\varphi^0(a)+Q_1^1\varphi^1(a)+Q_1^3\varphi^3(a)+\dots\right],\\ \dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int_a^{a+i\omega}\varphi(u)\,du={}^1\varphi(a+i\omega)\\ \qquad\qquad+Q_1^1\varphi^1(a+i\omega)+Q_1^3\varphi^3(a+i\omega)+\dots;\end{cases}$$

$$(41)^\star\quad\begin{cases}{}^1\varphi\left(a-\dfrac{\omega}{2}\right)=-\left[P_1^1\varphi^1\left(a-\dfrac{\omega}{2}\right)\right.\\ \qquad\qquad\left.+P_1^3\varphi^3\left(a-\dfrac{\omega}{2}\right)+P_1^5\varphi^5\left(a-\dfrac{\omega}{2}\right)+\dots\right],\\ \dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int_{a-\frac{\omega}{2}}^{a+i\omega}\varphi(u)\,du={}^1\varphi(a+i\omega)\\ \qquad\qquad+Q_1^1\varphi^1(a+i\omega)+Q_1^3\varphi^3(a+i\omega)+\dots;\end{cases}$$

$$(42)^\star\quad\begin{cases}{}^1\varphi\left(a-\dfrac{\omega}{2}\right)=-\left[\dfrac{1}{2}\varphi^0(a)+Q_1^1\varphi^1(a)+Q_1^3\varphi^3(a)+\dots\right],\\ \dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int_a^{a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega}\varphi(u)\,du={}^1\varphi\left[a+\left(i+\dfrac{1}{2}\right)\omega\right]\\ \quad+P_1^1\varphi^1\left[a+\left(i+\dfrac{1}{2}\right)\omega\right]+P_1^3\varphi^3\left[a+\left(i+\dfrac{1}{2}\right)\omega\right]+\dots.\end{cases}$$

On trouve dans l'Ouvrage cité de M. Oppolzer les valeurs des nombres P_1, Q_1 jusqu'à P_1^{19}, Q_1^{19} et de leurs logarithmes.

Dans ces formules les limites de l'intégrale diffèrent de a d'un nombre entier de fois $\frac{\omega}{2}$. Il peut être nécessaire de prendre pour limite supérieure un nombre quelconque qui peut toujours être représenté par l'une ou l'autre des formes

$$\alpha+(i+z)\omega,\quad a+\left(i+\frac{1}{2}+y\right)\omega,$$

où z et y désignent des nombres compris entre $-\frac{1}{4}$ et $+\frac{1}{4}$. Il suffira d'ajouter au second membre de l'une des formules $(40)^\star$ et $(41)^\star$ ou de l'une des formules $(39)^\star$ et $(42)^\star$ l'intégrale

$$\frac{1}{\omega}\int_{a+i\omega}^{a+(i+z)\omega}\varphi(u)\,du$$

ou l'intégrale

$$\frac{1}{\omega}\int_{a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega}^{a+\left(i+\frac{1}{2}+y\right)\omega}\varphi(u)\,du,$$

données la première, par la formule (35), la seconde par la formule (36).

Les intégrales totales dépendent de toutes les valeurs $f^1(a+i\omega)$, $f^2(a+i\omega)$, ... Oppolzer, dans l'Ouvrage cité, les écrit sous les formes suivantes

$$(43)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{1}{\omega}\int^{a+(i+z)\omega}\varphi(u)\,du\\ &\quad={}^1\varphi(a+i\omega)+z\varphi(a+i\omega)+\mathrm{Q}_1^1(z)\varphi^1(a+i\omega)\\ &\qquad+\mathrm{Q}_1^2(z)\varphi^2(a+i\omega)+\dots\\ &\qquad+z^3[\mathrm{Q}_1^2(z)\varphi^2(a+i\omega)+\mathrm{Q}_1^3(z)\varphi^3(a+i\omega)+\dots],\end{aligned}\right.$$

$$(44)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{1}{\omega}\int^{a+\left(i+\frac{1}{2}+y\right)\omega}\varphi(u)\,du\\ &\quad={}^1\varphi\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right]+\mathrm{P}_1^1(y)\varphi^1\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right]\\ &\qquad+\mathrm{P}_1^2(y)\varphi^2\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right]+\dots\\ &\qquad+y\left\{\varphi^0\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right]+\mathrm{P}_1^2(y)\varphi^2\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right]+\dots\right\},\end{aligned}\right.$$

et donne des Tables étendues des logarithmes des coefficients

$$\mathrm{P}_1^i(y),\quad \mathrm{Q}_1^i(z).$$

Les limites inférieures des intégrales sont a ou $a-\frac{\omega}{2}$, suivant la détermination que l'on adopte pour ${}^1\varphi\left(a-\frac{\omega}{2}\right)$.

230. Calcul d'une intégrale double. — Si l'on additionne les équations (41*) et (35), on obtient

$$\begin{aligned}&\int_{a-\frac{\omega}{2}}^{a+(i+z)\omega}\varphi(u)\,du\\ &={}^1\varphi(a+i\omega)+z\varphi^0(a+i\omega)+\sum_{n=1}^{n=\infty}\left[\sum_0^n\frac{(-1)^{n-h}\mathrm{C}^{n-h}\left(1^2\dots\overline{2n-1}^2\right)}{1.2\dots2n.2^{2n}(2h+1)}\varphi^{2n-1}(a+i\omega)\right.\\ &\qquad+\sum_1^n\frac{(-1)^{n-h}\mathrm{C}^{n-h}\left(2^2\dots\overline{2n-2}^2\right)z^{2h}}{1.2\dots2n-1\,2^{2n-2h}.2h}\varphi^{2n-1}(a+i\omega)\\ &\qquad\left.+\sum_1^n\frac{(-1)^{n-h}\mathrm{C}^{n-h}\left(2^2\dots\overline{2n-2}^2\right)z^{2h+1}}{1.2\dots2n.2^{2n-2h}(2h+1)}\varphi^{2n}(a+i\omega)\right],\end{aligned}$$

Si l'on multiplie les deux membres de cette équation par du, et que l'on intègre entre les limites $-\frac{1}{2}$ et $+\frac{1}{2}$ de z, on a

$$\frac{1}{\omega^2}\int_{a+\left(i-\frac{1}{2}\right)\omega}^{a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega} du\int_{a-\frac{\omega}{2}}^{u}\varphi(u)\,du$$

$$= {}^1\varphi(a+i\omega)+\sum_{n=1}^{n=}\frac{\varphi^{2n-1}(a+i\omega)}{1.2\ldots 2n.2^{2n}}\left[\sum_{0}\frac{(-1)^{n-h}C^{n-h}_{\left(1^2\ldots\overline{2n-1}^2\right)}}{2h+1}\right.$$

$$\left.+\sum_{1}^{n}2n\,\frac{(-1)^{n-h}C^{n-h}_{\left(2^2\ldots\overline{2n-2}^2\right)}}{2h(2h+1)}\right].$$

Si l'on donne à i, dans cette formule, les valeurs $0, 1, 2, \ldots, i$ et que l'on fasse la somme des résultats, on trouve, par l'application des formules (8) et (28),

$$\frac{1}{\omega^2}\int_{a-\frac{\omega}{2}}^{a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega} du\int_{a-\frac{\omega}{2}}^{u}\varphi(u)\,du$$

$$= {}^2\varphi\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right]$$

$$+\sum_{n=1}^{n=\infty}\sum_{h=1}^{h=n}\frac{(-1)^{n-h}C^{n-h}_{\left(2^2\ldots\overline{2n-2}^2\right)}(1-2n)}{1.2\ldots 2n.2^{2n}(2h+1)}\varphi^{2n-2}\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right],$$

en posant

$${}^2\varphi(a)=\sum_{n=1}^{n=\infty}P_1^{2n-1}\left[(n-1)\varphi^{2n-2}(a)+n\varphi^{2n-2}(a-\omega)\right]$$

et, comme on l'a fait déjà,

$${}^1\varphi\left(a-\frac{\omega}{2}\right)=-\sum_{n=1}^{n=\infty}P_1^{2n-1}\varphi^{2n-1}\left(a-\frac{\omega}{2}\right).$$

On calcule, par un procédé analogue, l'intégrale double entre les limites a et $a+i\omega$, et, par une modification analogue à celle de la page 254, les intégrales prises entre les limites a et

$a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega$, $a-\frac{\omega}{2}$ et $a+i\omega$. En posant

$$P_{\frac{1}{2}}^{2n-2}=\sum_{h=1}^{h=n}\frac{(-1)^{n-h}(1-2n)C^{n-h}\left(2^2\ldots\overline{2n-2}^2\right)}{1.2\ldots 2n.2^{2n}(2h+1)},$$

$$Q_{2}^{2n-2}=\sum_{h=1}^{h=n}\frac{(-1)^{n-h}(2n-1)C^{n-h}\left(1^2.3^2\ldots\overline{2n-3}^2\right)}{2^{2n-1}.1.2\ldots 2n(2h+1)(2h-1)},$$

on trouve les formules suivantes où Σ s'étend de $n=1$ à $n=\infty$

(45)
$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{\omega^2}\displaystyle\int_{a-\frac{\omega}{2}}^{a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega}du\int_{a-\frac{\omega}{2}}^{u}{}_{1}^{2}\varphi(u)du={}_{1}^{2}\varphi\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right]\\ \qquad\qquad+\Sigma P_{\frac{1}{2}}^{2n-2}{}_{1}^{2n-2}\varphi\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right],\\ \text{en supposant}\\ \qquad {}_{1}^{2}\varphi(a)=\Sigma P_{1}^{2n-1}\left[(n-1){}_{1}^{2n-2}\varphi(a)+n\,{}_{1}^{2n-2}\varphi(a-\omega)\right],\\ {}_{1}^{1}\varphi\left(a-\dfrac{\omega}{2}\right)=-\Sigma P_{1}^{2n-1}\,{}_{1}^{2n-1}\varphi\left(a-\dfrac{\omega}{2}\right);\end{array}\right.$$

(46)
$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{\omega^2}\displaystyle\int_{a}^{a+i\omega}du\int_{a}^{u}{}_{1}^{2}\varphi(u)\,du={}_{1}^{2}\varphi(a+i\omega)+\Sigma Q_{2}^{2n-2}\,{}_{1}^{2n-2}\varphi(a+i\omega),\\ \text{en supposant}\\ \qquad {}_{1}^{2}\varphi(a)=-\Sigma Q_{2}^{2n-2}\,{}_{1}^{2n-2}\varphi(a),\\ {}_{1}^{1}\varphi\left(a-\dfrac{\omega}{2}\right)=-\left[\frac{1}{2}\,{}_{1}^{0}\varphi(a)+\Sigma Q_{1}^{2n-1}\,{}_{1}^{2n-1}\varphi(a)\right];\end{array}\right.$$

(47)
$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{\omega^2}\displaystyle\int_{a-\frac{\omega}{2}}^{a+i\omega}du\int_{a-\frac{\omega}{2}}^{u}{}_{1}^{2}\varphi(u)\,du={}_{1}^{2}\varphi(a+i\omega)+\Sigma Q_{2}^{2n-2}\,{}_{1}^{2n-2}\varphi(a+i\omega),\\ \text{en supposant}\\ \qquad {}_{1}^{2}\varphi(a)=\Sigma P_{1}^{2n-1}\left[(n-1){}_{1}^{2n-2}\varphi(a)+n\,{}_{1}^{2n-2}\varphi(a-\omega)\right],\\ {}_{1}^{1}\varphi\left(a-\dfrac{\omega}{2}\right)=-\Sigma P_{1}^{2n-1}\,{}_{1}^{2n-1}\varphi\left(a-\dfrac{\omega}{2}\right);\end{array}\right.$$

(48)
$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{\omega^2}\displaystyle\int_{a}^{a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega}du\int_{a}^{u}{}_{1}^{2}\varphi(u)\,du={}_{1}^{2}\varphi\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right],\\ \qquad\qquad+\Sigma P_{\frac{1}{2}}^{2n-2}\,{}_{1}^{2n-2}\varphi\left[a+\left(i+\frac{1}{2}\right)\omega\right],\\ \text{en supposant}\\ \qquad {}_{1}^{2}\varphi(a)=-\Sigma Q_{2}^{2n-2}\,{}_{1}^{2n-2}\varphi(a),\\ {}_{1}^{1}\varphi\left(a-\dfrac{\omega}{2}\right)=-\left[\frac{1}{2}\,{}_{1}^{0}\varphi(a)+\Sigma Q_{1}^{2n-1}\,{}_{1}^{2n-1}\varphi(a)\right].\end{array}\right.$$

Le Tableau suivant donne les valeurs des premiers nombres P_1^{2n-1}, Q_1^{2n-1}, P_2^{2n}, Q_2^{2n} :

$$\begin{aligned}
&Q_1^1 = -\ 1 \ : 12 && P_1^1 = +\ 1 \ : 24\\
&Q_1^3 = +\ 11 \ : 720 && P_1^3 = -\ 17 \ : 5760\\
&Q_1^5 = -\ 191 \ : 60480 && P_1^5 = +\ 367 \ : 967680\\
&Q_1^7 = +\ 2497 : 3628800 && P_1^7 = -\ 27859 : 464486400\\
&P_2^0 = -\ 1 \ : 24 && Q_2^0 = +\ 1 \ : 12\\
&P_2^2 = +\ 17 \ : 1920 && Q_2^2 = -\ 1 \ : 240\\
&P_2^4 = -\ 367 \ : 193536 && Q_2^4 = +\ 31 \ : 60480\\
&P_2^6 = +\ 27859 : 66355200 && Q_2^6 = -\ 289 \ : 3628800
\end{aligned}$$

Il peut arriver que l'on ait besoin de la valeur d'une intégrale double analogue aux précédentes, pour laquelle la limite supérieure de la seconde intégration, au lieu d'être un multiple de $\frac{\omega}{2}$, soit un nombre quelconque de l'une des formes $a + (i + z)\omega$ ou $a + \left(i + \frac{1}{2} + y\right)\omega$.

Les formules nécessaires s'obtiennent, comme dans le cas des intégrales simples, en ajoutant à l'une des intégrales (45-48) ou (46-47) l'intégrale prise entre les limites

$$a + \left(i + \frac{1}{2}\right)\omega \qquad \text{et} \qquad a + \left(i + \frac{1}{2}\right)\omega + \omega y,$$

ou entre les limites

$$a + i\omega \qquad \text{et} \qquad a + (i + z)\omega.$$

On obtient ainsi des résultats de la forme

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{\omega^2}\int^{a+\left(i+\frac{1}{2}+y\right)\omega} du \int^{u} \varphi(u)\,du\\
&\quad = {}^2\varphi\left[a + \left(i + \frac{1}{2}\right)\omega\right] + P_2^0(y)\,\varphi^0\left[a + \left(i + \frac{1}{2}\right)\omega\right]\\
&\qquad\qquad + P_2^2(y)\,\varphi^2\left[a + \left(i + \frac{1}{2} + y\right)\omega\right] + \dots\\
&\quad + y\left\{{}^1\varphi\left[a + \left(i + \frac{1}{2}\right)\omega\right] + P_2^1(y)\,\varphi^1\left[a + \left(i + \frac{1}{2}\right)\omega\right]\right.\\
&\qquad\qquad \left. + P_2^3(y)\,\varphi^3\left[a + \left(i - \frac{1}{2} + y\right)\omega\right] + \dots\right\}.
\end{aligned}\right. \tag{49}$$

et

$$(50)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{1}{\omega^2}\int^{a+(i+z)\omega} du \int^{u} \varphi(u)\,du\\ &\quad = {}^2\varphi(a+i\omega) + Q_2^0(z)\,\varphi^0(a+i\omega) + Q_2^2(z)\,\varphi^2(a+i\omega)+\dots\\ &\qquad + z[{}^1\varphi(a+i\omega) + Q_2^1(z)\,\varphi^1(a+i\omega) + Q_2^3(z)\,\varphi^3(a+i\omega)+\dots].\end{aligned}\right.$$

Si l'on voulait laisser arbitraires les limites inférieures des intégrales, il suffirait d'ajouter une constante arbitraire à chacune de ces expressions. Il peut être avantageux de faire en sorte que, à la limite inférieure des intégrales, les seconds membres, tels qu'ils sont, soient nuls, et qu'il en soit de même de ceux qui représentent l'intégrale simple. En faisant, à cet égard, $i=-1$ dans la première formule, ou zéro dans la seconde, on trouve sans peine les conditions

$$\begin{aligned}{}^2\varphi\left(a-\frac{\omega}{2}\right) = &-\left[P_2^0(y_0)\,\varphi^0\left(a-\frac{\omega}{2}\right) + P_2^2(y_0)\,\varphi^2\left(a-\frac{\omega}{2}\right)+\dots\right]\\ &-y_0\left[{}^1\varphi\left(a-\frac{\omega}{2}\right)\right.\\ &\left.+P_2^1(y_0)\,\varphi^1\left(a-\frac{\omega}{2}\right)+P_2^3(y_0)\,\varphi^3\left(a-\frac{\omega}{2}\right)+\dots\right],\end{aligned}$$

en désignant par $a-\frac{\omega}{2}+y_0\omega$ la limite inférieure de l'intégrale (49), et

$$\begin{aligned}{}^2\varphi(a) = &-[Q_2^0(z_0)\,\varphi^0(a)+Q_2^2(z_0)\,\varphi^2(a)+\dots]\\ &-z\left[{}^1\varphi\left(a-\frac{\omega}{2}\right)+\frac{1}{2}\varphi^0(a)+Q_2^1(z_0)\,\varphi^1(a)+Q_2^3(z_0)\,\varphi^3(a)+\dots\right],\end{aligned}$$

en désignant par $a+z_0\omega$ la limite inférieure de l'intégrale (50).

On peut introduire les mêmes hypothèses dans les intégrales simples (43) et (44); on a alors

$$\begin{aligned}{}^1\varphi\left(a-\frac{\omega}{2}\right) = &-\left[P_1^1(y_0)\,\varphi^1\left(a-\frac{\omega}{2}\right)+P_1^3(y_0)\,\varphi^3\left(a-\frac{\omega}{2}\right)+\dots\right]\\ &-y_0\left[\varphi^0\left(a-\frac{\omega}{2}\right)+P_1^2(y_0)\,\varphi^2\left(a-\frac{\omega}{2}\right)+\dots\right],\end{aligned}$$

en désignant par $a-\frac{\omega}{2}+\omega y_0$ la limite inférieure des intégrales (49) et (44), et

$$\begin{aligned}{}^1\varphi\left(a-\frac{\omega}{2}\right) = &-\left[\left(z_0+\frac{1}{2}\right)\varphi^0(a)+Q_1^1(z_0)\,\varphi^1(a)+Q_1^3(z_0)\,\varphi^3(\alpha)+\dots\right]\\ &-z_0^3[Q_1^2(z_0)\,\varphi^2(a)+Q_1^4(z_0)\,\varphi^4(a)+\dots,\end{aligned}$$

où $a + z_0\omega$ désigne la limite inférieure des intégrales (50) et (43).

On trouve dans l'Ouvrage cité de M. Oppolzer des Tables étendues des coefficients $P_2^i(y)$, $Q_2^j(z)$ pour les valeurs de y et z de 0 à 0,25. Il est aisé de voir que $P_1^i(y)$, $P_2^i(z)$ sont des fonctions paires de y, $Q_1^j(z)$, $Q_2^j(z)$ des fonctions paires de z.

231. Méthode de Gauss pour le calcul numérique d'une intégrale définie. — Au lieu d'employer pour l'interpolation d'une fonction les valeurs que prend cette fonction pour des valeurs de la variable en progression arithmétique, on peut se proposer de choisir les valeurs de la variable de manière à augmenter la précision.

Si nous reprenons les notations du § 216 et que nous posions

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n),$$

le produit $f(x)y^{(n)}$, d'après ce qui a été dit au § 218 s'annule pour les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de x. La fonction $y^{(n)}$ pourra être développée en une série ordonnée suivant les puissances de x sous cette forme

$$y^{(n)} = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots,$$

et l'on aura

$$y = Y + f(x)(\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots),$$

Y étant le polynôme entier, de degré $n - 1$, qui prend les mêmes valeurs que y pour les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de x, polynôme qui est donné par les formules d'interpolation de Newton ou de Lagrange.

Soit à calculer l'intégrale

$$\int_g^h y\,dx. \tag{51}$$

Posons

$$x = g + (h - g)t,$$

l'intégrale deviendra

$$(h - g)\int_0^1 y\,dt,$$

de sorte que nous pouvons admettre que les limites de l'intégrale (51) sont zéro et un.

Si l'on remplace la fonction y par Y, on a approximativement

$$\int_0^1 y\,dx = \int_0^1 \mathrm{Y}\,dx; \tag{52}$$

comme on a exactement

$$\int_0^1 y\,dx = \int_0^1 \mathrm{Y}\,dx + \alpha_0 \int_0^1 f(x)\,dx + \alpha_1 \int_0^1 x\,f(x)\,dx + \ldots,$$

on augmentera généralement la précision par l'emploi de la formule (52) en choisissant les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de telle manière que l'on ait

$$\left\{\begin{aligned} &\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x\,f(x)\,dx \\ &\qquad = \int_0^1 x^2 f(x)\,dx = \ldots = \int_0^1 x^{n-1} f(x)\,dx = 0. \end{aligned}\right. \tag{53}$$

Ces conditions définissent la fonction $f(x)$.

Il est aisé, en posant

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n,$$

de déterminer les coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ au moyen des équations (53). L'une de ces équations est en effet

$$\int_0^1 x^\mu f(x)\,dx = \frac{1}{\mu+n+1} + \frac{a_1}{\mu+n} + \ldots + \frac{a_n}{\mu+1} = 0. \tag{54}$$

La fraction

$$\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-n+1)}{(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+n+1)}$$

ne diffère du premier membre de l'équation (54) que par un facteur constant, puisqu'elle a le même dénominateur et s'annule pour les mêmes valeurs 0, 1, 2, ..., $n-1$ de μ. En la décomposant en fractions simples, on lui donnera la forme

$$\frac{\mathrm{B}_1}{\mu+1} + \frac{\mathrm{B}_2}{\mu+2} + \ldots + \frac{\mathrm{B}_{n+1}}{\mu+1+n},$$

et l'on aura

$$\frac{a_n}{\mathrm{B}_1} = \frac{a_{n-1}}{\mathrm{B}_2} = \ldots = \frac{a_1}{\mathrm{B}_n} = \frac{1}{\mathrm{B}_{n+1}}.$$

On trouve ainsi, à un facteur constant près,

$$f(x) = \mathrm{F}[n+2, \quad -(n+1), \quad 1, \quad x],$$

où $\mathrm{F}(\alpha, \beta, \gamma, x)$ désigne la série hypergéométrique

$$1 + \frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2 + \dots.$$

Si l'on envisage la fonction X_n de Legendre et qu'on y remplace x par $\cos\theta$, elle devient

$$P_n = F\left[n+2, \quad -(n+1), \quad 1, \quad \sin^2\frac{\theta}{2}\right].$$

On voit donc que $f(x)$ est ce que devient P_n quand on y remplace $\sin^2\frac{\theta}{2}$ par x, ou $\cos\theta$ par $1-2x$, ou ce que devient X_n quand on y remplace x par $1-2x$.

232. **Démonstration de Jacobi.** — Les conditions (53) peuvent être remplacées par d'autres, comme il suit.

On a généralement

$$\int uv\,dx = u\int v\,dx - \int\left[\frac{du}{dx}dx\int v\,dx\right],$$

$$\int\left[dx\frac{du}{dx}\int v\,dx\right] = \frac{du}{dx}\iint v\,dx^2 - \int\left[\frac{d^2u}{dx^2}dx\iint v\,dx^2\right],$$

et ainsi de suite, d'où par substitutions successives

$$\begin{aligned}\int uv\,dx = u\int v\,dx - \frac{du}{dx}\iint v\,dx^2 + \frac{d^2u}{dx^2}\iiint v\,dx^3 - \dots \\ + (-1)^m\frac{d^mu}{dx^m}\int\int^{(m)}\dots v\,dx^m \\ + (-1)^{m+1}\int\left[dx\frac{d^{m+1}u}{dx^{m+1}}\int\int\int\dots v\,dx^m\right].\end{aligned}$$

Si l'on pose

$$u = x^m, \qquad v = f(x),$$

on a

$$\begin{aligned}\int x^m f(x)\,dx = x^m\int f(x)\,dx - mx^{m-1}\iint f(x)\,dx^2 \\ + m(m-1)x^{m-2}\iiint f(x)\,dx^3 + \dots \\ + (-1)^m m(m-1)\dots 1\int\int\int^{(m+1)} f(x)\,dx^{m+1}.\end{aligned}$$

Si l'on donne à m les valeurs $0, 1, 2, \ldots, n-1$, on déduit des équations (53) les suivantes

$$\int f(x)\,dx = \iint f(x)\,dx^2 = \ldots = \int^n f(x)\,dx^n = 0.$$

Si l'on désigne par $\pi(x)$ la dernière de ces intégrales, le problème est ramené à trouver une fonction $\pi(x)$ qui s'annule ainsi que ses $n-1$ premières dérivées pour $x=0$ et pour $x=1$. $f(x)$ étant du degré n, $\pi(x)$ sera du degré $2n$. D'où l'on voit que, à un facteur constant près,

$$\pi(x) = x^n(x-1)^n.$$

Donc

$$f(x) = \mathrm{M}\frac{d^n[x^n(x-1)^n]}{dx^n}.$$

Si l'on pose

$$x = \frac{1-z}{2}, \qquad x-1 = -\frac{z+1}{2},$$

on aura

$$f(x) = \frac{\mathrm{M}}{2^{2n}}\frac{d^n(z^2-1)^n}{dz^n}.$$

On sait que la fonction $\mathrm{X}_n(z)$ de Legendre est

$$\mathrm{X}_n(z) = \frac{(-1)^n}{1.2\ldots n}\frac{d^n(z^2-1)^n}{dz^n}.$$

On aura donc bien $f(x)$ en remplaçant, dans $\mathrm{X}_n(z)$, z par $1-2x$.

233. **Interpolation par les fonctions trigonométriques.** — On sait, par le théorème de Fourier, que toute fonction non infinie qui n'a entre 0 et 2π qu'un nombre limité de maxima ou minima ou de points de discontinuité peut être développée entre les limites 0 et 2π en une série de la forme

$$(55)\quad y = a_0 + a_1\cos x + a_2\cos 2x + \ldots + b_1\sin x + b_1\sin 2x + \ldots.$$

On est conduit, par cette considération, à remplacer par une suite limitée de cette sorte une fonction offrant les caractères indiqués ci-dessus, dont on connaît les valeurs pour des valeurs données de x.

Si l'on suppose que les valeurs données de x soient en nombre impair, qu'on les désigne par $x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1}$, que l'on pose

$$(\mathrm{A})\quad \mathrm{Y} = a_0 + a_1\cos x + \ldots + a_n\cos nx + b_1\sin x + \ldots + b_n\sin nx,$$

que l'on détermine les coefficients en écrivant que pour $x = x_k$, Y a une valeur donnée Y_k, et cela pour $k = 1, 2, \ldots, 2n+1$, on élimine aisément les coefficients par la méthode ordinaire et l'on trouve

$$(56)\quad \left\{ \begin{aligned} Y = {} & Y_1 \frac{\sin\frac{x-x_2}{2}\sin\frac{x-x_3}{2}\cdots\sin\frac{x-x_{2n+1}}{2}}{\sin\frac{x_1-x_2}{2}\sin\frac{x_1-x_3}{2}\cdots\sin\frac{x_1-x_{2n+1}}{2}} \\ & + Y_2 \frac{\sin\frac{x-x_1}{2}\cdots\sin\frac{x-x_{2n+1}}{2}}{\sin\frac{x_2-x_1}{2}\cdots\sin\frac{x_2-x_{2n+1}}{2}} + \ldots, \end{aligned} \right.$$

formule qui satisfait évidemment aux conditions imposées, le nombre des facteurs de chaque numérateur étant pair ($= 2n$), ce qui permet de remplacer les produits de sinus par des fonctions linéaires de sinus ou cosinus de multiples entiers de x jusqu'à nx.

234. **Cas où le nombre des valeurs utilisées de la variable est pair.** — Si l'on remplace dans le terme en Y_k de la formule précédente $\frac{x-x_{2n+1}}{2}$ par $\frac{x-x_k}{2} + \frac{x_k-x_{2n+1}}{2}$, que l'on développe le sinus de cette somme par la formule d'addition, le résultat prend immédiatement la forme

$$(57)\quad \left\{ \begin{aligned} Y = {} & \sum_{k=1}^{k=2n} Y_k \frac{\sin\frac{x-x_1}{2}\sin\frac{x-x_2}{2}\cdots\sin\frac{x-x_{2n}}{2}}{\sin\frac{x_k-x_1}{2}\sin\frac{x_k-x_2}{2}\cdots\sin\frac{x_k-x_{2n}}{2}} \cos\frac{x-x_k}{2} \\ & + A\sin\frac{x-x_1}{2}\sin\frac{x-x_2}{2}\cdots\sin\frac{x-x_{2n}}{2}. \end{aligned} \right.$$

235. **Quelques théorèmes relatifs aux fonctions trigonométriques.** — Si une fonction X de la forme A ou de la forme

$$(B)\quad \left\{ \begin{aligned} & c_1\cos\frac{x}{2} + c_2\cos\frac{3x}{2} + \ldots \\ & + d_1\sin\frac{x}{2} + d_2\sin\frac{3x}{2} + \ldots \end{aligned} \right.$$

s'annule pour $x = a$, elle est divisible par $\sin\frac{x-a}{2}$ et le quotient est de la forme B dans le premier cas, de la forme A dans le second.

La fonction X s'annulant pour $x=a$, on peut de chaque terme de cette fonction X retrancher ce que devient ce terme quand on y remplace x par a. Si on le fait, les formules

$$(58)\quad \begin{cases} \dfrac{\cos nx-\cos na}{\sin\dfrac{x-a}{2}} = -2\sin\left[\left(n-\dfrac{1}{2}\right)x+\dfrac{a}{2}\right] \\ \qquad\qquad -2\sin\left[\left(n-\dfrac{3}{2}\right)x+\dfrac{3a}{2}\right]-\dots \\ \qquad\qquad -2\sin\left[\dfrac{1}{2}x+\left(n-\dfrac{1}{2}\right)a\right], \\ \dfrac{\sin nx-\sin na}{\sin\dfrac{x-a}{2}} = 2\cos\left[\left(n-\dfrac{1}{2}\right)x+\dfrac{a}{2}\right] \\ \qquad\qquad +2\cos\left[\left(n-\dfrac{3}{2}\right)x+\dfrac{3a}{2}\right]+\dots \\ \qquad\qquad +2\cos\left[\dfrac{1}{2}x+\left(n-\dfrac{1}{2}\right)a\right] \end{cases}$$

démontrent le théorème pour une fonction X de la forme A.

On peut de même retrancher de chaque terme le produit de $\cos\dfrac{x-a}{2}$ par la valeur que prend le terme quand on y remplace x par a, puisque cela revient à retrancher de X le produit de $\cos\dfrac{x-a}{2}$ par la valeur o que prend X pour $x=a$. Si on le fait, les formules suivantes, où n désigne la moitié d'un nombre impair,

$$(59)\quad \begin{cases} \dfrac{\cos nx-\cos\frac{1}{2}(x-a)\cos na}{\sin\frac{1}{2}(x-a)} \\ \quad =-2\sin\left[\left(n-\dfrac{1}{2}\right)x+\dfrac{a}{2}\right]-2\sin\left[\left(n-\dfrac{3}{2}\right)x+\dfrac{3}{2}a\right]-\dots \\ \quad -2\sin[x+(n-1)a]-\sin na, \\ \dfrac{\sin nx-\cos\frac{1}{2}(x-a)\sin na}{\sin\frac{1}{2}(x-a)} \\ \quad =2\cos\left[\left(n-\dfrac{1}{2}\right)x+\dfrac{a}{2}\right]+2\cos\left[\left(n-\dfrac{3}{2}\right)x+\dfrac{3}{2}a\right]+\dots \\ \quad +2\cos[x+(n-1)a]+\cos na \end{cases}$$

démontrent le théorème pour une fonction X de la forme B.

Il suit de là qu'une fonction X d'une des formes A ou B qui

s'annule pour les valeurs a, b, c, ... est divisible par

$$\sin\frac{x-a}{2}\sin\frac{x-b}{2}\sin\frac{x-c}{2}\dots,$$

et que le quotient est de la même forme que la fonction X si le nombre des valeurs a, b, c, ... est pair, de l'autre forme si ce nombre est impair

236. **Cas des fonctions paires ou des fonctions impaires.** — Les formules des deux paragraphes précédents sont susceptibles de formes différentes si les fonctions considérées sont paires ou impaires. Dans le premier cas, la formule (55) se réduit à

$$a_0 + a_1\cos x + a_2\cos 2x + \dots,$$

dans le second à

$$b_1\sin x + b_2\sin 2x + \dots.$$

Dans le premier cas, si l'on donne les valeurs $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n+1}$ de la fonction Y pour $n+1$ valeurs $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ de x, on trouve sans peine

$$(60)\qquad Y = \sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{(\cos x - \cos x_1)(\cos x - \cos x_2)\dots(\cos x - \cos x_{n+1})}{(\cos x_k - \cos x_1)(\cos x_k - \cos x_2)\dots(\cos x_k - \cos x_{n+1})}.$$

Dans le second cas, si l'on donne les valeurs de Y pour $x = x_1$, $x_2, \dots, x_n$, les formules

$$\frac{\sin ix}{\sin x} = 2\cos(i-1)x + 2\cos(i-3)x + \dots + 2\cos x, \qquad \text{si } i \text{ est pair},$$
$$= 2\cos(i-1)x + 2\cos(i-3)x + \dots + 2\cos 2x + 1, \qquad \text{si } i \text{ est impair}$$

montrent que $\frac{Y}{\sin x}$ est un polynôme entier en $\cos x$ du degré $n-1$ et l'on en déduit que

$$(61)\qquad Y = \sum_{k=1}^{k=n} Y_k \frac{\sin x(\cos x - \cos x_1)\dots(\cos x - \cos x_n)}{\sin x_k(\cos x_k - \cos x_1)\dots(\cos x_k - \cos x_n)}.$$

237. **Cas où les valeurs utilisées x_1, x_2, ..., de x, envisagées comme celles d'arcs issus d'un même point sur une même circonférence ont pour extrémités les sommets d'un polygone régulier.** — Si l'on désigne par μ le nombre des valeurs $x_1, x_2, \dots$, que l'on ait

$$x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \dots = x_\mu - x_{\mu-1} = \frac{2\pi}{\mu},$$

les relations précédentes se simplifient.

I. *Le produit*

$$P = \sin\frac{1}{2}(x - x_1)\sin\frac{1}{2}(x - x_2)\ldots\sin\frac{1}{2}(x - x_\mu)$$

est égal à

$$(62) \qquad \mp\frac{\sin\frac{1}{2}\mu(x - x_1)}{2^{\mu-1}},$$

le signe étant — ou + suivant que μ est pair ou impair.

Si, en effet, on écrit

$$P = \cos\frac{1}{2}(x - x_1 - \pi)\cos\frac{1}{2}(x - x_2 - \pi)\ldots\cos\frac{1}{2}(x - x_\mu - \pi)$$

et que l'on remplace le produit par une somme de cosinus, on voit aisément que l'on aura une somme de l'une des formes A ou B ne renfermant que des cosinus et où le terme dont l'argument sera le plus fort multiple de x sera

$$\frac{1}{2^{\mu-1}}\cos\frac{1}{2}(\mu x - x_1 - x_2 - \ldots - x_\mu - \mu\pi)$$

ou

$$\frac{(-1)^{\mu-1}}{2^{\mu-1}}\sin\frac{\mu}{2}(x - x_1).$$

Ce terme s'annule pour $x = x_1, x_2, \ldots, x_\mu$; il ne diffère donc de P que par un facteur constant, et, par suite, il coïncide avec P.

On voit aisément que dans la valeur (62) on peut remplacer x_1 par $x_2, x_3, \ldots$, en changeant alternativement le signe, de sorte que

$$P = \frac{(-1)^{\mu+k}}{2^{\mu-1}}\sin\frac{\mu}{2}(x - x_k).$$

II. *Le produit*

$$Q = (\cos x - \cos x_1)(\cos x - \cos x_2)\ldots(\cos x - \cos x_\mu)$$

est égal à

$$\frac{\cos\mu x - \cos\mu x_1}{2^{\mu-1}}.$$

Ce second lemme se déduit du précédent après que l'on a remplacé, dans Q, $\cos x - \cos x_i$ par

$$2\sin\frac{1}{2}(x - x_i)\sin\frac{1}{2}(-x - x_i).$$

On peut d'ailleurs, dans la valeur de Q, remplacer x_1 par x_k, de

sorte que

$$Q = \frac{1}{2^{\mu-1}}[\cos\mu x - \cos\mu x_k].$$

238. **Transformation des formules trigonométriques d'interpolation.** — D'après le premier lemme du n° 237, le coefficient de Y_k dans la formule (56) a pour numérateur

$$\frac{(-1)^{k-1}}{2^{\mu-1}} \frac{\sin\frac{1}{2}\mu(x-x_k)}{\sin\frac{1}{2}(x-x_k)},$$

en posant

$$\mu = 2n+1,$$

et pour dénominateur la valeur que prend ce rapport pour $x = x_k$, savoir

$$\frac{(-1)^{k-1}\mu}{2^{\mu-1}},$$

de sorte que le coefficient de Y_k est

$$\frac{1}{\mu}\frac{\sin\frac{1}{2}\mu(x-x_k)}{\sin\frac{1}{2}(x-x_k)} = \frac{1}{\mu}[1+2\cos(x-x_k) + 2\cos 2(x-x_k)+\ldots+2\cos n(x-x_k)].$$

Dans la formule (57) le coefficient de $Y_k \cos\frac{x-x_k}{2}$ est

$$\frac{1}{\mu}\frac{\sin\frac{1}{2}\mu(x-x_k)}{\sin\frac{1}{2}(x-x_k)},$$

en posant $\mu = 2n$ ou

$$\frac{1}{\mu}\left[2\cos\frac{1}{2}(x-x_k)+2\cos\frac{3}{2}(x-x_k)+\ldots+2\cos\frac{2n-1}{2}(x-x_k)\right],$$

et le coefficient de Y_k est

$$\frac{1}{\mu}[1+2\cos(x-x_k)+2\cos 2(x-x_k)+\ldots + 2\cos(n-1)(x-x_k)+\cos n(x-x_k)].$$

Dans la formule (60) le numérateur du coefficient de Y_k est

$$\frac{1}{2^{\mu-1}}\frac{(\cos\mu x-\cos\mu x_k)}{\cos x-\cos x_k};$$

le dénominateur est la valeur de cette expression pour $x = x_k$, ou

$$\frac{\mu}{2^{\mu-1}}\frac{\sin\mu x_k}{\sin x_k}.$$

Il s'ensuit que le coefficient de Y_k est

$$\frac{1}{\mu}\frac{\sin x_k}{\sin \mu x_k}\frac{\cos \mu x - \cos \mu x_k}{\cos x - \cos x_k}$$

$$= \frac{1}{\mu \sin \mu x_k}[\sin \mu x_k + 2\sin(\mu-1)x_k \cos x + 2\sin(\mu-2)x_k \cos 2x + \ldots + 2\sin x_k \cos(\mu-1)x].$$

Dans la formule (61) le coefficient de Y_k se déduit du précédent; il est

$$\frac{1}{\mu \sin \mu x_k}[2\cos(\mu-1)x_k \sin x + 2\cos(\mu-2)x_k \sin 2x + \ldots + 2\cos x_k \sin(\mu-1)x + \sin \mu x].$$

239. Valeur de l'intégrale $\int_0^{2\pi} Y\,dx$. — Le coefficient de Y_k dans cette intégrale est, par la formule (56),

$$\frac{2\pi}{\mu}.$$

On a donc

$$\int_0^{2\pi} Y\,dx = \frac{2\pi}{2n+1}(Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_{2n+1}).$$

L'application de la formule (57) donne immédiatement

$$\int_0^{2\pi} Y\,dx = \frac{2\pi}{2n}(Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_{2n}).$$

L'application de la formule (60) donne

$$\int_0^{2\pi} Y\,dx = \frac{2\pi}{\mu}(Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_\mu),$$

et celle de la formule (61)

$$\int_0^{2\pi} Y\,dx = 0.$$

240. Différence entre les intégrales $\int_0^{2\pi} y\,dx$ et $\int_0^{2\pi} Y\,dx$. —

Supposons d'abord que Y soit déterminé par les $2n+1$ valeurs que prend y pour les $2n+1$ valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1}$ de x.

La différence $y - Y$ est divisible par

$$\varpi(x) = \sin\frac{x-x_1}{2}\sin\frac{x-x_2}{2}\cdots\sin\frac{x-x_{2n+1}}{2},$$

et le quotient est de la forme

$$\alpha_1\cos\frac{x}{2} + \alpha_2\cos\frac{3x}{2} + \ldots,$$
$$\beta_1\sin\frac{x}{2} + \beta_2\sin\frac{3x}{2} + \ldots$$

On en conclut que la différence entre les intégrales $\int_0^{2\pi} y\,dx$ et $\int_0^{2\pi} Y\,dx$ est représentée par des termes de la forme

$$\begin{matrix}\alpha_i \\ \beta_i\end{matrix}\int_0^{2\pi}\varpi(x)\begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}\frac{2i-1}{2}x\,dx.$$

On verra aisément que tous ces termes sont nuls, excepté

$$\alpha_n\int_0^{2\pi}\varpi(x)\begin{matrix}\cos nx\,dx \\ \sin nx\,dx\end{matrix},$$

dont la valeur est

$$\mp\alpha_n\frac{\pi}{2^{2n}}\begin{matrix}\sin \\ \cos\end{matrix}(2n+1)x_1.$$

Si le nombre des valeurs de x est pair, la différence $y - Y$ sera divisible par

$$\varphi(x) = \sin\frac{x-x_1}{2}\sin\frac{x-x_2}{2}\cdots\sin\frac{x-x_{2n}}{2},$$

et le quotient sera de la forme

$$\alpha_0 + \alpha_1\cos x + \alpha_2\cos 2x + \ldots,$$
$$+\beta_1\sin x + \beta_2\sin 2x + \ldots.$$

La différence entre les intégrales $\int_0^{2\pi} y\,dx$ et $\int_0^{2\pi} Y\,dx$ se réduira à

$$\begin{matrix}\alpha_n \\ \beta_n\end{matrix}\int_0^{2\pi}\varphi(x)\begin{matrix}\cos nx \\ \sin nx\end{matrix}dx,$$

dont la valeur est

$$\begin{matrix}\alpha_n \\ \beta_n\end{matrix}\frac{(-1)^n}{2^{2n-1}}\pi\begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}nx_1.$$

Des circonstances analogues se présentent si y et Y sont des fonctions paires, de sorte que les valeurs x_1, x_2, ..., de x, que nous avons considérées, ont ici le même rôle que les racines de l'équation $X_n = 0$; elles permettent de pousser, en quelque sorte, deux fois plus loin la précision de l'intégrale. En outre, le calcul même de cette intégrale se réduit au calcul du produit de la moyenne des valeurs de y par 2π.

241. **Représentation analytique des coefficients de la série de Fourier.** — Les coefficients de la série de Fourier s'expriment par des intégrales définies au moyen des identités suivantes dont la vérification est immédiate

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx = 0, \qquad \text{si} \qquad m \gtrless n,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx \, dx = 0, \qquad \text{si} \qquad m \gtrless n,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \sin nx \, dx = 0, \qquad \text{si} \qquad m = n,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 mx \, dx = \int_0^{2\pi} \sin^2 mx \, dx = \pi, \qquad \text{et} \qquad \int_0^{2\pi} dx = 2\pi.$$

En multipliant par $\cos ix \, dx$ ou $\sin ix \, dx$ les deux membres de l'identité (55), intégrant de 0 à 2π les termes et admettant la légitimité de cette opération, on a

$$a_i = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos ix \, dx,$$

$$b_i = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin ix \, dx,$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \, dx.$$

Nous ne nous arrêterons pas à l'étude des conditions dans lesquelles ces résultats sont légitimes. Le lecteur trouvera une étude complète de la question dans les Traités d'Analyse récemment publiés, notamment dans celui de M. E. Picard.

242. **Calcul numérique de ces coefficients.** — Si l'on se propose de calculer numériquement, par approximation, les coefficients des

premiers termes de la série, on emploiera les résultats obtenus au n° 238.

On calculera les valeurs de la fonction y pour $2n+1$ valeurs de x, de la forme $x_1, x_1+\frac{2\pi}{n}, x_1+2\frac{2\pi}{n}, \ldots, x_1+2n\frac{2\pi}{n}$. Désignant par Y_k la valeur qui correspond à l'une x_k de ces valeurs de x, on aura approximativement

$$Y=\sum\frac{Y_k}{2n+1}[1+2\cos(x-x_k)+2\cos 2(x-x_k)+\ldots+2\cos n(x-x_k)].$$

$$=\sum\frac{Y_k}{2n+1}+\frac{2\cos x}{2n+1}\sum Y_k\cos x_k+\frac{2\cos 2x}{2n+1}\sum Y_k\cos 2x_k+\ldots$$
$$+\frac{2\cos nx}{2n+1}\sum Y_k\cos nx_k$$
$$+\frac{2\sin x}{2n+1}\sum Y_k\sin x_k+\frac{2\sin 2x}{2n+1}\sum Y_k\sin 2x_k+\ldots$$
$$+\frac{2\sin nx}{2n+1}\sum Y_k\sin nx_k.$$

Si le nombre des valeurs de x employées est pair, égal à $2n$, on aura

$$y=\sum\frac{Y_k}{2n}[1+2\cos(x-x_k)+2\cos 2(x-x_k)+\ldots$$
$$+2\cos(n-1)(x-x_k)+\cos n(x-x_k)],$$

formule qu'il est aisé de développer comme la précédente.

Si la fonction est paire et le nombre des valeurs employées de x égal à μ, on aura

$$y=\sum\frac{Y_k}{\mu\sin\mu x_k}[\sin\mu x_k+2\sin(\mu-1)x_k\cos x$$
$$+2\sin(\mu-2)x_k\cos 2x+\ldots+2\sin x_k\cos(\mu-1)x].$$

Si la fonction est impaire

$$y=\sum\frac{Y_k}{\mu\sin\mu x_k}[2\cos(\mu-1)x_k\sin x+2\cos(\mu-2)x_k\sin 2x+\ldots$$
$$+2\cos x_k\sin(\mu-1)x+\sin\mu x].$$

Dans les deux formules précédentes, on a $\sin\mu x_k=\sin\mu x_1$. Si $\sin\mu x_1$ devient nul, les formules cessent de s'appliquer. Les valeurs données à x deviennent alors deux à deux équivalentes.

Il suffit de reprendre la formule générale relative au cas où aucune hypothèse n'est faite sur la fonction y pour constater qu'alors les termes dépendant des sinus deviennent tous nuls; l'inverse a lieu quand la fonction est impaire.

243. Cas où l'on veut calculer un seul coefficient de la série de Fourier. Formule de Jacobi. — Le calcul de l'intégrale

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(ix)\,dx,$$

peut être effectué par la formule donnée au n° 239, formule dont la portée a été précisée au n° 240. Il faut cependant remarquer que le développement en série périodique de $f(x)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(ix)\,dx$ ne commence vraisemblablement à converger pratiquement qu'après les termes en $\cos ix$ ou en $\sin ix$, de sorte que si i est grand, il faudra, pour obtenir quelque précision, employer un très grand nombre de valeurs de la fonction.

On doit à Jacobi une transformation générale de l'intégrale qui permet d'avoir sous le signe $\int$ en facteur, au lieu de $\cos ix$ ou $\sin ix$, la puissance $i^{\text{ième}}$ de $\sin x$, ce qui supprime l'inconvénient que nous venons de signaler. Cette formule est la suivante

$$(\alpha)\qquad \int_0^{\pi} f(\cos x)\cos ix\,dx = \frac{1}{1.3.5\ldots(2i-1)}\int_0^{\pi} f^{i}(\cos x)\sin^{2i}x\,dx.$$

On constate aisément, au moyen des valeurs connues des intégrales qui y figurent, l'identité suivante

$$(\beta)\qquad \int_0^{\pi} \cos^{p}x\cos ix\,dx = \frac{p(p-1)\ldots(p-i+1)}{1.3.5.(2i-1)}\int_0^{\pi} \sin^{2i}x\cos^{p-i}x\,dx.$$

où p et i désignent des nombres entiers et positifs.

Cela étant, soit $f(z)$ une fonction de z développable en série suivant les puissances ascendantes de z, sous la forme

$$f(z) = \Sigma A_p z^p.$$

On aura

$$\frac{d^i f(z)}{dz^i} = \Sigma p(p-1)\ldots(p-i+1)A_p z^{p-i}.$$

On a aussi

$$\int_0^{\pi} f(\cos x)\cos ix\,dx = \Sigma A_p \int_0^{\pi} \cos^p x \cos ix\,dx,$$

et par la relation (β)

$$\int_0^{\pi} f(\cos x)\cos ix\,dx = \frac{1}{1.3\ldots 2i-1}\int_0^{\pi} \sin^{2i}x\,dx\,[\Sigma A_p p(p-1)\ldots(p-i+1)\cos^{p-i}x].$$

Cette identité, si l'on tient compte de la formule (γ) coïncide avec la relation α.

244. **Formule de Legendre.** — La relation (α) due à Jacobi est une généralisation d'une formule très élégante qui avait été donnée antérieurement par Legendre.

Posons

$$f(\cos x) = (1 - 2a\cos x + a^2)^{-\frac{1}{2}},$$

Nous aurons

$$\frac{d^i f(\cos x)}{d\cos x^i} = 1.3\ldots(2i-1)a^i(1-2a\cos a + a^2)^{-\left(i+\frac{1}{2}\right)},$$

et la formule α devient

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos ix\,dx}{\sqrt{1-2a\cos x+a^2}} = a^i \int_0^{\pi} \frac{\sin^{2i}x\,dx}{(1-2a\cos x+a^2)^{i+\frac{1}{2}}}.$$

Si l'on pose

$$\sin y = \frac{\sin x}{\sqrt{1-2a\cos x+a^2}},$$

ce qui est la transformation de Landen, on a

$$\frac{dy}{\sqrt{1-a^2\sin^2 y}} = \frac{dx}{\sqrt{1-2a\cos x+a^2}},$$

et les limites de x étant o et π, celles de y sont aussi o et π. On en conclut

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos ix\,dx}{\sqrt{1-2a\cos x+a^2}} = \int_0^{\pi} \frac{\sin^{2i}y\,dy}{\sqrt{1-a^2\sin^2 y}},$$

ce qui est la formule de Legendre.

245. Quelques développements en séries trigonométriques. — Nous terminerons en obtenant par des voies diverses certains développements utiles en Astronomie.

Soit à développer en série trigonométrique un arc y lié à un arc x par la formule

$$\operatorname{tang} y = \frac{a \sin x}{1 - a \cos x}.$$

Différentiant par rapport à a, on aura

$$\begin{aligned}\frac{dy}{da} &= \frac{\sin x}{1 - 2a\cos x + a^2} = \left(\frac{e^{ix}}{1 - ae^{ix}} - \frac{e^{-ix}}{1 - ae^{-ix}}\right)\frac{1}{2i} \\ &= \frac{e^{ix}}{2i}(1 + ae^{ix} + a^2 e^{2ix} + \dots) - \frac{e^{-ix}}{2i}(1 + ae^{-ix} + a^2 e^{-2ix} + \dots) \\ &= \sin x + a \sin 2x + a^3 \sin 3x + \dots\end{aligned}$$

D'où

$$y = y_0 + a \sin x + \frac{a^2}{2}\sin 2x + \frac{a^3}{3}\sin 3x + \dots,$$

y_0 étant la valeur que prend y pour $x = 0$, valeur qui est multiple de π.

On fait application de cette formule au cas d'une fonction y liée à une variable x par la formule

$$\operatorname{tang} y = n \operatorname{tang} x,$$

en supposant que x et y s'annulent en même temps. On a

$$\operatorname{tang}(y - x) = \frac{(n-1)\operatorname{tang} x}{1 + n\operatorname{tang}^2 x} = \frac{\dfrac{n-1}{n+1}\sin 2x}{1 - \dfrac{n-1}{n+1}\cos 2x}.$$

D'où

$$y - x = \frac{n-1}{n+1}\sin 2x + \frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 \sin 4x + \frac{1}{3}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^3 \sin 6x + \dots.$$

Un développement intéressant par son rapprochement avec le premier est celui de

$$y = \log\sqrt{1 - 2a\cos x + a^2}.$$

On a

$$\frac{dy}{da} = \frac{a - \cos x}{1 - 2a\cos x + a^2} = -\frac{1}{2}\frac{e^{ix}}{1 - ae^{ix}} - \frac{1}{2}\frac{e^{-ix}}{1 - ae^{-ix}}.$$

Développant les deux fractions suivant les puissances ascendantes de a, on obtient

$$\frac{dy}{da} = -(\cos x + a\cos 2x + a^2\cos 3x + \ldots),$$

d'où

$$y = -a\cos x - \frac{a^2}{2}\cos 2x - \frac{a^3}{3}\cos 3x + \ldots.$$

Soit, encore, à trouver le développement de

$$y = \frac{1}{1 - 2a\cos x + a^2},$$

ou celui d'une puissance entière de cette quantité. Nous emploierons l'artifice suivant qui nous a été indiqué par M. J. Tannery. L'identité

$$\frac{1}{(1+u)(1+v)} = \frac{1}{1-uv}\left(\frac{1}{1+u} - \frac{v}{1+v}\right),$$

appliquée au produit

$$\frac{1}{(1 - ae^{ix})(1 - ae^{-ix})},$$

donne

$$y = \frac{1}{1-a^2}\left(\frac{1}{1-ae^{ix}} - \frac{e^{-ix}}{1-ae^{-ix}}\right),$$

d'où, en développant chaque fraction en série,

$$y = \frac{1}{1-a^2}(1 + 2a\cos x + 2a^2\cos 2x + 2a^3\cos 3x + \ldots).$$

En élevant l'avant dernière formule à la puissance k on trouvera aussi bien le développement de y^k.

Jacobi dans le Mémoire intitulé : *Formula transformationis integralium definitarum*, où il donne la formule fondamentale (α) en fait application à la démonstration de la formule suivante due à Legendre

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\cos ix\, dx}{(1 - 2a\cos x + a^2)^n}$$
$$= 2\,\frac{n(n+1)\ldots(n+i-1)}{1.2\ldots i}\,\frac{a^i}{(1-a^2)^n}$$
$$\times\left[1 + \frac{n(n-1)}{1(i+1)}\,\frac{a^2}{1-a^2} + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.(i+1)(i+2)}\,\frac{a^4}{(1-a^2)^2}\right.$$
$$\left. + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3\ldots(i+1)(i+2)(i+3)}\,\frac{a^6}{(1-a^2)^6}\cdots\right],$$

qui donne le coefficient de $\cos ix$ dans le développement de

$$\frac{1}{(1-2a\cos x+a^2)^n},$$

car ce coefficient est

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos ix\,dx}{(1-2a\cos x+a^2)^n}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos ix\,dx}{(1-2a\cos x+a^2)^n}.$$

246. **Application de la relation de Jacobi aux fonctions de Bessel.** — Supposons que l'on ait entre deux arcs x et M la relation

$$x-e\sin x=\mathrm{M},$$

où e désigne une constante et proposons-nous de développer $\cos nx$ et $\sin nx$ en séries trigonométriques.

Nous aurons, x étant une fonction impaire de M,

$$\begin{aligned}\cos nx &= p_n+2p_n^1\cos\mathrm{M}+2p_n^{(2)}\cos 2\mathrm{M}+\ldots,\\ \sin nx &= \quad 2q_n^1\sin\mathrm{M}+2q_n^{(2)}\sin 2\mathrm{M}+\ldots.\end{aligned}$$

On a par les formules qui déterminent ces coefficients

$$p_n^i=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos i\mathrm{M}\cos nx\,d\mathrm{M}.$$

L'intégration par partie donne

$$\begin{aligned}p_n^i &= \frac{n}{i\pi}\int_0^{\pi}\sin i\mathrm{M}\sin nx\,d\mathrm{M}\\ &= \frac{n}{2i\pi}\int_0^{\pi}dx\left\{\cos[(i-n)x-ie\sin x]-\cos[(i+n)x-ie\sin x]\right\}.\end{aligned}$$

De même

$$q_n^i=\frac{n}{2i\pi}\int_0^{\pi}dx\left\{\cos[(i-n)x-ie\sin x]+\cos[(i+n)x-ie\sin x]\right\}.$$

Si l'on pose avec Bessel

$$\mathrm{I}_k^i=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(ix-k\sin x)\,dx,$$

on a

$$\begin{aligned}p_n^i &= \frac{n}{2i}(\mathrm{I}_{ie}^{i-n}-\mathrm{I}_{ie}^{i+n}),\\ q_n^i &= \frac{n}{2i}(\mathrm{I}_{ie}^{i-n}+\mathrm{I}_{ie}^{i+n}).\end{aligned}$$

En développant le cosinus d'où dépend l'expression de I_k^i, on a

$$I_k^i = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos ix \cos(k\sin x)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin ix \sin(k\sin x)\,dx.$$

On voit sans effort que si i est pair, la seconde intégrale est nulle et si i est impair, la première est nulle.

On a donc

$$I_k^{2i} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(k\sin x)\cos 2ix\,dx,$$

$$I_k^{2i+1} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(k\sin x)\sin(2i+1)x\,dx.$$

Si l'on remplace x par $\frac{\pi}{2} - z$, on a

$$I_k^{2i} = -\frac{(-1)^i}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \cos(k\cos z)\cos 2iz\,dz$$

$$= \frac{(-1)^i}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(k\cos z)\cos 2iz\,dz,$$

et

$$I_k^{2i+1} = -\frac{(-1)^i}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \sin(k\cos z)\cos(2i+1)z\,dz$$

$$= \frac{(-1)^i}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(k\cos z)\cos(2i+1)z\,dz.$$

L'application de la formule (α) à ces intégrales donne immédiatement la forme suivante, applicable, que i soit pair ou impair

$$\pi I_k^i = \frac{k^i}{1.3\ldots(2i-1)}\int_0^{\pi} \cos(k\cos x)\sin^{2i}x\,dx.$$

FIN DU TOME PREMIER.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME PREMIER.

PREMIÈRE PARTIE.

QUELQUES THÉORIES APPLICABLES A L'ÉTUDE DES SCIENCES EXPÉRIMENTALES.

CHAPITRE I.

Principes du calcul des probabilités.

1. Définition de la probabilité d'un événement. — 2. Probabilité composée. — 3. Probabilité d'un événement composé. — 4. Cas où le nombre des événements possibles est infini. — 5. Distribution des événements fortuits. — 6. Formule de Wallis. — 7. Convergence d'un produit d'un nombre infini de facteurs. — 8. Formule de Stirling. — 9. Distribution de deux événements contraires par la réitération des épreuves. — 10. Quel est le groupe le plus probable? — 11. Probabilité de l'événement le plus probable. — 12. Probabilité d'un écart donné. — 13. Probabilité d'un écart inférieur à un nombre donné. — 14. Écart probable. Écart moyen. — 15. Combien à parier contre un que l'écart soit compris entre des limites données? — 16. Extension du théorème de Bernoulli. — 17. Application du théorème de Bernoulli aux phénomènes naturels. — 18. Exemple tiré de la taille d'un grand nombre d'hommes. — 19. Probabilité des causes. — 20. Problème général relatif aux causes..... 1

CHAPITRE II.

Loi de probabilités des erreurs. — Combinaison des observations.

21. Caractères des erreurs envisagées dans le présent Chapitre. — 22. Loi de probabilité des erreurs. — 23. Démonstration de Laplace. — 24. Démonstration de la formule $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$. — 25. Mesure de la précision des observations. — 26. Erreur probable. — 27. Erreur moyenne. — 28. Principe de la méthode des moindres carrés. — 29. Nombre des erreurs comprises entre des limites données. — 30. Détermination de la valeur la plus probable d'une quantité mesurée directement. — 31. Détermination de l'erreur moyenne d'une observation. — 32. Application des règles données aux § 30 et 31. — 33. Poids des observations. — 34. Valeur la plus probable d'une quantité mesurée directement, si les observations ont des poids différents. — 35. Détermination d'inconnues liées par des équations données à des quantités mesurées directement. — 36. Valeurs les plus probables d'inconnues déterminées par des équations linéaires. Équations normales. — 37. Erreur moyenne d'une somme. — 38. Déter-

mination des poids des inconnues. — 39. Détermination des erreurs moyennes des observations et des inconnues. — 40. Application à un exemple. — 41. Cas où les observations ont des poids différents. — 42. Notations introduites par Gauss dans la résolution des équations normales. — 43. Vérification de tout le calcul. — 44. Détermination générale des poids des inconnues. — 45. Application de cette méthode à l'exemple traité au § 40. — 46. Méthode de Cauchy..... 18

CHAPITRE III.

Théorie générale des instruments d'optique.

47. Généralités. — 48. Équations des rayons incident et émergent. — 49. Image d'un point. — 50. Image d'un objet situé dans un plan perpendiculaire à l'axe. — 51. Points et plans principaux. — 52. Foyers et plans focaux. — 53. Distances focales principales. — 54. Point oculaire, anneau oculaire. — 55. Grossissement angulaire. — 56. Points nodaux. — 57. Relations entre les divers points et plans ci-dessus définis. — 58. Transformation des équations des rayons incident et émergent. — 59. Transformation des équations entre les coordonnées d'un point et celles de son image. — 60. Constructions géométriques. — 61. Plan de Bravais. — 62. Cas d'une lentille. — Formules générales. — 63. Discussion des propriétés des lentilles. — 64. Systèmes convergents, systèmes divergents. — 65. Combinaison de plusieurs systèmes optiques ayant même axe. — 66. Cas de plusieurs lentilles. — 67. Cas de deux systèmes optiques ayant même axe. — 68. Cas de deux lentilles infiniment minces en contact. Lentille équivalente. — 69. Détermination des éléments d'un système optique..... 49

CHAPITRE IV.

Dispersion. — Achromatisme.

70. Relation entre l'indice de réfraction et la vitesse de propagation du rayon lumineux. — 71. Production d'un spectre pur. — 72. Diverses sortes de spectres. — 73. Pouvoir dispersif. — 74. Marche d'un rayon à travers un prisme dans une section principale. Représentation algébrique des angles d'incidence et de réfraction. — 75. Relation entre les angles r, r', A. — 76. Limites imposées à l'angle d'incidence suivant la valeur de l'angle du prisme. — 77. Valeur de la déviation. Elle a toujours lieu vers la base du prisme. — 78. Déviation minimum. — 79. Variation de la déviation. — 80. Dispersion par un prisme. — 81. Dispersion minimum. — 82. Déviation par un système de prismes à arêtes parallèles. — 83. Déviation minimum dans un système de prismes à arêtes parallèles. — 84. Dispersion par un système de prismes à arêtes parallèles. Achromatisme. — 85. Achromatisme d'un système de deux prismes. — 86. Achromatisme d'un système de plusieurs prismes. — 87. Aberration de réfrangibilité dans les lentilles. 88. Aberration de réfrangibilité dans une lentille. — 89. Cercle minimum d'aberration. — 90. Achromatisme d'un objectif astronomique. — 91. Conditions d'achromatisme d'un objectif astronomique en supposant les lentilles infiniment minces et la relation entre les puissances réfractives linéaire. — 92. Exemple de ce qu'était l'aberration de réfrangibilité dans un objectif de Fraunhofer étudié par Biot. — 93. Achromatisme des oculaires de lunettes astronomiques..... 73

CHAPITRE V.

Théorie des instruments d'optique en deuxième approximation. — Aberration de sphéricité d'une lentille. — Propriété des faisceaux infiniment minces. — Lignes focales. — Cas du prisme.

94. Aberration de sphéricité. — 95. Réfraction par une seule surface, en deuxième approximation. — 96. Cas où l'on n'envisage que des rayons situés dans un plan passant par l'axe.

— 97. Cas où l'on regarde comme négligeable toute puissance de θ supérieure à la première — 98. Application des formules du numéro précédent au cas d'une lentille. — 99. Foyer de rayons parallèles très voisins du sommet. — 100. Cas où les rayons incidents sur une surface réfringente partent tous d'un même point pris sur l'axe. Équations rigoureuses. — 101. Détermination approchée de ξ′ en conservant les termes du troisième ordre. — 102. Cas d'une lentille. — 103. Cas où les rayons incidents sont parallèles à l'axe. — 104. Discussion de l'aberration longitudinale dans une lentille. — 105. Cas de plusieurs lentilles. — 106. Étude des faisceaux qui se rencontrent dans les instruments d'optique. — 107. Définition des congruences et des complexes de droites. — 108. Conditions pour que les droites d'une congruence soient normales à une surface. — 109. Condition pour que les droites d'un complexe forment une congruence et soient normales à une surface. — 110. Théorème de Malus. — 111. Représentation d'un faisceau infiniment mince ou pinceau. — 112. Distance minimum d'un rayon à l'axe du pinceau. — 112 bis. Plans focaux, foyers de l'axe du pinceau. — 113. Lignes focales. — 114. Cas où les rayons du pinceau sont normaux à une surface. — 115. Cas où le pinceau admet deux plans de symétrie rectangulaires. — 116. Limite d'une section perpendiculaire à l'axe. Cercle de confusion minimum. — 117. Emploi de la fonction caractéristique dans la théorie des instruments. — 118. Fonction caractéristique relative à un pinceau de rayons normaux à une surface. — 119. Relation entre les constantes de deux pinceaux, l'un incident sur une surface, l'autre réfracté. — 120. Lignes focales d'un pinceau réfracté par un prisme..... 95

CHAPITRE VI.

Vision. — Nature et clarté des images au foyer d'un instrument d'optique. Loupe. Lunette astronomique. Oculaires. Microscope. Télescope à miroirs.

122. Description sommaire de l'œil. — 123. Valeurs numériques des éléments optiques de l'œil. — 124. Vision. Œil normal, myope, hypermétrope. Presbytie. — 125. Acuité visuelle. — 126. Nature des images au foyer d'un instrument d'optique. — 127. Pouvoir séparateur. — 128. Clarté des images produites par les systèmes optiques. — 129. Éclat des images produites sur la rétine après le passage des rayons dans un instrument d'optique. — 130. Influence de l'œil sur le pouvoir séparateur. — 131. Vision par une lentille. — 132. Loupe. — 133. Loupe à deux verres. — 134. Lunette astronomique. Disposition des lentilles. Grossissement. — 135. Champ de la lunette astronomique. Dimensions des lentilles. — 136. Oculaire d'Huygens. — 137. Oculaire de Ramsden. — 138. Grossissements obtenus par les divers oculaires. — 139. Autres éléments optiques des oculaires composés. — 140. Détermination d'une lentille unique équivalente à un oculaire à deux verres. — 141. Perte apparente de la faculté d'accomodation dans les instruments d'optique. — 142. Microscope composé. — 143. Télescopes à miroirs. — 144. Argenture des miroirs de verre. — 145. Théorie de la réflexion sur un miroir. — 146. Miroir concave. — 147. Miroir convexe. — 148. Télescope d'Herschel. — 149. Télescope de Newton. — 150. Télescope de Grégory. — 151. Télescope de Cassegrain..... 125

CHAPITRE VII.

Pendules, chronomètres. Niveau, vernier, microscope micrométrique. — Cercle méridien, équatorial. — Description sommaire de l'équatorial coudé, de l'altazimut, du sextant, de l'héliomètre.

152. Notions générales sur les instruments servant à mesurer le temps. — 153. Pendules astronomiques. Appareil moteur. — 154. Remontage de la pendule. — 155. Pendule. — 156. Échappement de Reid. — 157. Chronomètres. Balancier compensateur. Spiral réglant. — 158. Échappement libre. — 159. Ressort moteur. — 160. Considérations générales sur les instru-

ments servant à déterminer les coordonnées des astres. — 161. Niveau à bulle d'air. — 162. Déterminer au moyen d'un niveau l'inclinaison d'une droite sur laquelle le niveau peut reposer. 163. Déterminer au moyen d'un niveau l'inclinaison d'un axe de rotation. — 164. Vernier. — 165. Micromètre. — 166. Lunette méridienne. — 167. Relation entre les diverses constantes instrumentales. — 168. Déduire de l'heure observée l'angle horaire de l'astre. — 169. Déduire de l'heure observée l'ascension droite de l'astre. — 170. Formules de réduction de Bessel, de Mayer, de Hansen. — 171. Emploi de plusieurs fils. — 172. Emploi d'un fil mobile. — 173. Distances des fils. — 174. Formule de réduction pour les observations faites au fil mobile. — 175. Détermination des constantes instrumentales. — 176. Emploi des cercles divisés. — 177. Microscope micrométrique. — 178. Examen de diverses causes d'erreur. — 179. Erreur d'excentricité. — 180. Erreurs périodiques de division. — 181. Erreurs accidentelles de division. — 182. Cercle méridien. Mesure des déclinaisons. — 183. Influence de l'inclinaison du fil. — 184. Emploi d'un fil mobile. — 185. Emploi d'une mire. — 186. Emploi du bain de mercure. Nadir. Nivellement. — 187. Observations par réflexion. — 188. Explication de la *fig.* 47. — 189. Équatorial. — 190. Erreurs de construction. — 191. Passage de la position directe à la position inverse. — 192. Calcul des coordonnées célestes. — 193. Détermination des constantes. — 194. Réglage pratique de l'équatorial. — 195. Observations équatoriales micrométriques. — 196. Mesure de l'angle de position et de la distance de deux astres. — 197. Mesure directe de la différence d'ascension droite et de la différence de déclinaison de deux astres, en s'aidant de la pendule sidérale. — 198. Mesure directe, au moyen du micromètre à deux vis parallèles, de la différence d'ascension droite. — 199. Détermination de la valeur angulaire du pas de la vis. — 200. Équatorial coudé. — 201. Altazimut. — 202. Sextant. — 203. Héliomètre 153

CHAPITRE VIII.

Mesure des angles et des arcs au moyen des unités ordinairement employées. — Précision que comportent les calculs numériques; exemples. — Logarithmes d'addition et de soustraction. — Formules principales de la Trigonométrie sphérique. — Résolution d'un triangle sphérique dans le cas qui se présente ordinairement en Astronomie. — Théorème de Legendre.

204. Mesure des angles. — 205. Valeurs diverses d'un même arc rapportées aux diverses unités. — 206. Remarques sur la précision des calculs numériques. — 207. Il vaut mieux déterminer un arc par sa tangente que par son sinus. — 208. Précision que comporte la résolution du problème de Képler. — 209. Logarithmes d'addition de Gauss. — 210. Formules fondamentales de la Trigonométrie sphérique. — 211. Formules de Gauss et Delambre. — 212. Résolution d'un triangle sphérique connaissant deux côtés et l'angle compris. — 213. Formules de vérification de Tietjen.— 214. Cas des triangles rectangles.— 215. Théorème de Legendre. 216

CHAPITRE IX.

Interpolation. — Formules de Newton, de Lagrange, algorithme des différences. — Application au calcul des dérivées, de l'intégrale simple et de l'intégrale double d'une fonction. — Méthode de Gauss pour le calcul d'une intégrale simple. — Interpolation au moyen des séries trigonométriques. — Calcul des coefficients. — Formule de Jacobi. — Quelques développements en séries.

216. Problème de l'interpolation. Solution de Newton. — 217. Expressions symétriques des coefficients introduits. — 218. Formules d'interpolation de Newton et de Lagrange. —

219. Algorithme des différences. — 220. Introduction des moyennes de différences consécutives. — 221. Introduction, dans la formule d'interpolation de Newton, de l'algorithme des différences. — 222. Formes diverses de la formule d'interpolation. — 223. Transformation des coefficients des formules d'interpolation. — 224. Calcul des sommes des produits de nombres donnés p à p. — 225. Relation entre les coefficients $C^{n-h}\left(\frac{\cdot\cdot}{1^2.3^2\ldots\overline{2n-1}^2}\right)$, $C^{n-h}\left(\frac{\cdot\cdot}{2^2.4^2\ldots\overline{2n-2}^2}\right)$. — 226. Valeurs numériques des dérivées successives d'une fonction déduites des valeurs de la fonction. — 227. Développement de $\varphi(u)$ en séries ordonnées suivant les puissances de z ou de y. — 228. Application. — 229. Calcul numérique de l'intégrale d'une fonction. — 230. Calcul d'une intégrale double. — 231. Méthode de Gauss pour le calcul numérique d'une intégrale définie. — 232. Démonstration de Jacobi. — 233. Interpolation par les fonctions trigonométriques. — 234. Cas où le nombre des valeurs utilisées de la variable est pair. — 235. Quelques théorèmes relatifs aux fonctions trigonométriques. — 236. Cas des fonctions paires ou des fonctions impaires. — 237. Cas où les valeurs utilisées $x_1, x_2, \ldots$, de x, envisagées comme celles d'arcs issus d'un même point sur une même circonférence ont pour extrémités les sommets d'un polygone régulier. — 238. Transformation des formules trigonométriques d'interpolation. — 239. Valeur de l'intégrale $\int_0^{2\pi} Y\,dx$. — 240. Différence entre les intégrales $\int_0^{2\pi} y\,dx$ et $\int_0^{2\pi} Y\,dx$. — 241. Représentation analytique des coefficients de la série de Fourier. — 242. Calcul numérique de ces coefficients. — 243. Cas où l'on veut calculer un seul coefficient de la série de Fourier. Formule de Jacobi. — 244. Formule de Legendre. — 245. Quelques développements en séries trigonométriques. — 246. Application de la relation de Jacobi aux fonctions de Bessel 232

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME PREMIER.

16223 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55

133182 Astron
B

Author Baillaud, B

Title Cours d'astronomie. vol.1.

UNIVERSITY OF TORONTO
LIBRARY

Do not
remove
the card
from this
Pocket.

Acme Library Card Pocket
Under Pat. "Ref. Index File."
Made by LIBRARY BUREAU